

**Министерство образования и науки России
Государственное образовательное учреждение
высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»**

ФИЗИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**с примерами решения задач
и контрольными работами**

**ПО РАЗДЕЛАМ «ВОЛНОВАЯ ОПТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ
АТОМНОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ»**

для бакалавров заочной формы обучения

Казань 2016

УДК 53(075.8)

Составители: доц. Е.В.Бурдова
ст. преп. А.И.Чуйкова
асс. Т.Ю.Старостина

Физика. Конспект лекций с примерами решения задач и контрольными работами по разделам «Волновая оптика. Элементы атомной физики и квантовой механики» для студентов заочной формы обучения: методические указания / Бурдова Е.В. и др.; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань: Конверс, 2016. – 85 с.

Содержат лекционный курс по разделам «Волновая оптика. Элементы атомной физики и квантовой механики» примеры решения задач и контрольные задания.

Предназначены для самостоятельной работы студентов заочного обучения механических и технологических специальностей.

Подготовлены на кафедре физики.

Печатаются по разрешению методической комиссии по очно-заочной и интегрированной формам обучения.

Рецензенты: доц. *Р.А. Шарафутдинов*
доц. *В.Р. Ризаев*

Предисловие

В данном пособии изложен краткий курс лекций по разделам «Волновая оптика», «Атомная физика и элементы квантовой механики». После каждого раздела приведены примеры решения задач. В конце методических указаний даны варианты контрольных работ. Номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре зачетной книжки или студенческого билета.

Контрольные работы выполняются в обычной школьной тетради, чернилами. На обложке должны быть указаны:

- КНИТУ,
- факультет,
- курс,
- номер группы,
- фамилия, имя, отчество студента,
- дисциплина,
- номер контрольной работы,
- вариант.

Условие задачи должно быть написано без сокращений, полностью, заданные величины записываются отдельно. Решение оформляется по стандартным правилам. На полях оставить место для замечаний преподавателя. При решении задачи должны быть приведены основные формулы, сделан чертеж (если нужно), сделаны необходимые пояснения. Единицы измерения приводятся в системе СИ. Контрольная работа должна быть зарегистрирована в деканате.

Если контрольная работа не была зачтена, студент обязан представить ее повторно, вместе с неверно решенными задачами.

Контрольные работы, оформленные не по правилам или не соответствующие своему варианту, зачтены не будут.

Развитие представлений о природе света

Первыми исследователями природы и законов распространения света были Платон (430 лет до н.э.), Аристотель (350 лет до н.э.). Представления о природе света развивались по мере создания оптических устройств, и к концу XXVII века сложились две теории природы света:

I – корпускулярная (Ньютон);

II – волновая (Гюйгенс, Фук).

Согласно Ньютону, свет – поток корпускул, излучаемых светящимися телами. Явление распространения и отражения Ньютон объяснил законами механики.

Согласно Гюйгенсу, свет – это волна, каждая точка которой испускает вторичные волны. Гюйгенс сумел объяснить явления интерференции, дифракции света, законы отражения и преломления света. Однако он не сумел объяснить различную скорость света в различных средах и физическую природу различных цветов (дисперсия).

Эти противоречия были устранены в 70-е годы XIX века. Максвелл записал уравнения для электромагнитных полей (волн) и связал электрические и магнитные явления. Но он не сумел объяснить процессы испускания и поглощения света, фотоэффект, тепловое излучение. В 1900 году Планк высказал гипотезу о квантовой природе света. Согласно его гипотезы свет испускается и поглощается квантами с энергией $\varepsilon = h \cdot \nu$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, ν – частота электромагнитного излучения.

В 1905 году Эйнштейн создал квантовую теорию, согласно которой не только излучение и поглощение, но и распространение света происходит в виде потока световых квантов (фотонов). Энергия фотонов связана с импульсом

$p_{\text{ф}} = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ (формула Дегаля).

Масса фотона при движении $m_{\text{ф}} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}$, масса покоя фотона $m_{0\text{ф}}$ равна нулю $m_0=0$.

Согласно современным представлениям, свет – совокупность электромагнитных волн, излучаемых атомами. При определенных

условиях свет проявляет не только волновые, но и корпускулярные свойства. Таким образом, свет представляет собой единство дискретности и непрерывности – двойственную корпускулярно-волновую природу.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

1.1. Законы геометрической оптики

До открытия природы света были установлены основные законы геометрической оптики: *закон прямолинейного распространения света* – в оптически однородной среде свет распространяется прямолинейно; *закон независимости световых лучей* – световой луч при объединении с другими ведет себя независимо от остальных лучей, т.е. справедлив принцип суперпозиции; *закон отражения*; *закон преломления*.

Если свет падает на границу раздела двух прозрачных сред, то падающий луч 1 разделяется на два луча – отраженный 2 и преломленный 3, направления которых задаются законами отражения и преломления (рис. 1).

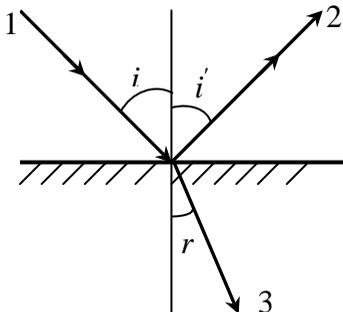


Рис. 1. Законы отражения и преломления

Закон отражения света: отраженный луч 2 лежит в одной плоскости с падающим лучом 1 и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол отражения i' равен углу падения i : $i = i'$.

Закон преломления света: луч падающий 1, луч преломленный 3 и перпендикуляр, проведенный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения i к синусу угла преломления r есть величина постоянная для данных сред:

$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21}$, где n_{21} – *относительный показатель преломления* (показатель преломления второй среды относительно

первой). Относительный показатель преломления двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления $n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$.

Абсолютным показателем преломления среды называется величина n , равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости v в среде: $n = \frac{c}{v}$. Подставляя $n_1 = c/v_1$

и $n_2 = c/v_2$ в формулу относительного показателя преломления, получим $n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{v_1}{v_2}$. Таким образом, относительный

показатель преломления показывает во сколько раз скорость света в первой среде больше, чем во второй.

1.2. Явление полного внутреннего отражения

Среда, имеющая больший абсолютный показатель преломления, называется *оптически более плотной*. Если луч переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную, т.е. $n_2 < n_1$ (например, из стекла в воздух), то угол падения i больше угла преломления r , т.е. $i < r$ (рис. 2).

Угол падения, угол преломления которого равен $\pi/2$, называется *предельным углом* $i_{\text{пр}}$. При этом угле падения луч преломленный скользит по границе раздела двух сред (лучи 1-1'). При предельном угле падения, угол преломления равен $\pi/2$, $\sin \pi/2=1$ тогда закон преломления для предельного угла приобретает вид:

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Явление при котором, свет, падая на границу раздела двух прозрачных сред, во вторую среду не попадает, а полностью отражается называется *полным внутренним*

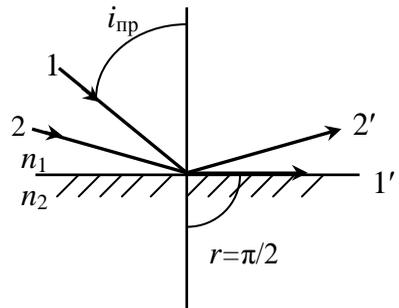


Рис. 2. Явление полного внутреннего отражения

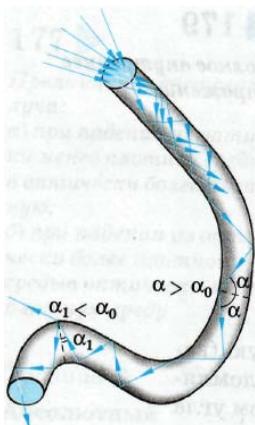


Рис. 3. Распространение света в световоде

отражением (лучи 2-2'). Это явление возможно при выполнении двух условий: луч должен идти из более оптически плотной среды в менее плотную среду, т.е. $n_1 > n_2$; угол падения больше предельного угла $i > i_{пр}$. Явление полного внутреннего отражения используется в волоконной оптике (рис. 3).

Волоконная оптика – система передачи оптических изображений с помощью стекловолокон (световодов). Повсеместно используется в медицине в качестве эндоскопов и в системах передачи информации.

2. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

2.1. Электромагнитная теория света

В волновой оптике рассматриваются явления: интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия.

Согласно теории Максвелла свет представляет собой поперечные электромагнитные волны, представляющие собой колебания электрического и магнитного полей (рис. 4). Векторы E и H

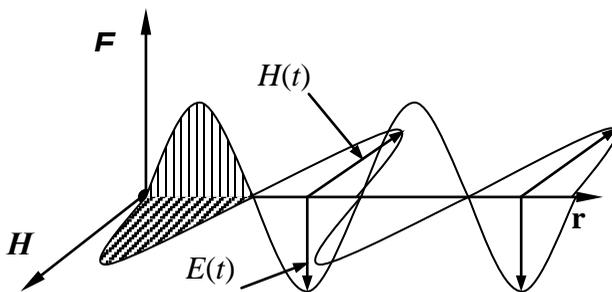


Рис. 4. Электромагнитная волна

напряженности электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$), колеблются в одной фазе и лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны \mathbf{r} .

В основе волновой оптики лежат уравнения Максвелла, связывающие электрические поля с магнитными. Плоские монохроматической волны описываются уравнениями:

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad H = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где E_0 – амплитуда вектора напряженности электрического поля; H_0 – амплитуда вектора напряженности магнитного поля, k – волновое число, равное $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Объемная плотность энергии электромагнитной волны $\omega_{\text{эм}}$ складывается из объемной плотности энергии электрического поля $\omega_{\text{эл}}$ и объемной плотности энергии магнитного поля $\omega_{\text{магн}}$:

$$\omega_{\text{эм}} = \omega_{\text{эл}} + \omega_{\text{магн}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Поскольку электромагнитные волны возникают при любом ускоренном движении электрических зарядов, спектр электромагнитных излучений, наблюдаемых в природе и создаваемых в технике, очень широк. В таблице 1 приведены границы диапазонов длин волн в спектре электромагнитных волн

Таблица 1

γ-излучение	рентгеновское излучение	оптический диапазон			радиоволны
		ультрафиолетовое излучение	видимое излучение	инфракрасное излучение	
< $6 \cdot 10^{-12}$ м	$6 \cdot 10^{-12}$ – $2 \cdot 10^{-9}$ м	10^{-9} – $4 \cdot 10^{-7}$ м	$4 \cdot 10^{-7}$ – $8 \cdot 10^{-7}$ м	$8 \cdot 10^{-7}$ – $5 \cdot 10^{-4}$ м	10^{-4} – 10^3 м

2.2. Интерференция световых волн

Интерференция света – явление наложения двух или нескольких когерентных волн, в результате чего происходит пространственное перераспределение интенсивности электромагнитной волны. Наблюдаемая картина интерференции представляет собой чередование светлых и темных полос.

Когерентными называются монохроматические волны с согласованными колебаниями векторов \mathbf{E} (колебания совершаются в одной плоскости) и с постоянной во времени разностью фаз ($\Delta\phi = \text{const}$). *Монохроматические волны* – волны одной определенной постоянной частоты.

Волны от естественных источников света всегда не когерентны, так как свет испускается множеством атомов за короткий промежуток времени ($\tau \approx 10^{-8}$ с). По истечении этого времени атом переходит из возбужденного состояния в нормальное. Далее возбуждись, атом вновь излучает световые волны, но уже с другой фазой. Таким образом, волны, испускаемые атомами за интервал времени $\tau \approx 10^{-8}$ с, имеют постоянную амплитуду и фазу и могут считаться когерентными. Когерентными и монохроматическими источниками можно считать вынужденные колебания лазеров и мазеров.

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля (или светового вектора \mathbf{E}):

$$I \sim E_0^2$$

Пусть две когерентные волны от источников S_1 и S_2 $\mathbf{E}_1 = E_{01} \cos(\omega t - kx_1 + \phi_1)$ и $\mathbf{E}_2 = E_{02} \cos(\omega t - kx_2 + \phi_2)$ проходят различные пути x_1 и x_2 и интерферируют в точке А, возбуждая в пространстве колебания одинакового направления, т.е. в точке А происходит сложение гармонических колебаний одного направления (рис. 5).

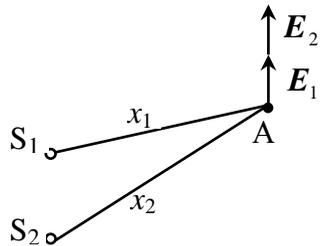


Рис. 5.
Интерференция света

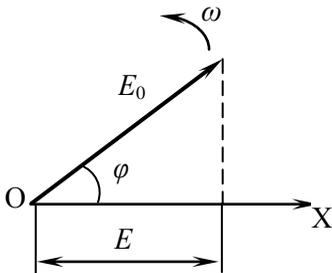


Рис.6. Метод вращающегося вектора амплитуды

X будет описываться законом $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$.

При сложении двух колебаний E_1 и E_2 воспользуемся принципом суперпозиции, т.к. световые волны подчиняются закону независимости световых лучей, и определим результирующее колебание E_3 (рис. 7). Амплитуда результирующего колебания E_{03} определяется по теореме косинусов и равна

$E_{03}^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2 \cdot E_{01} \cdot E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, а интенсивность света результирующей волны ($I \sim E_0^2$) $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, где $\varphi_2 - \varphi_1$ – разность фаз, постоянная во времени. Обозначим разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = \Delta\varphi$ и проанализируем формулу:

1. При $\Delta\varphi = 2m\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots, n$) значение $\cos\Delta\varphi = +1$, интенсивность результирующей волны равна

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2}$ и при равенстве интенсивностей $I_1 = I_2$ становится равной $I = 4I_1$, т.е. наблюдается усиление интенсивности света, что соответствует интерференционному максимуму.

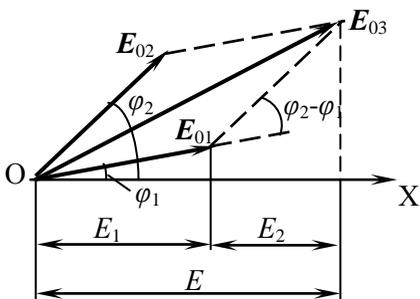


Рис. 7. Сложение гармонических колебаний

2. При $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ ($m=0, 1, 2, \dots, n$) значение $\cos\Delta\varphi = -1$, интенсивность

результирующей волны равна $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} = 0$, т.е.

наблюдается ослабление интенсивности света, что соответствует условию минимума.

Таким образом, при наложении когерентных волн в зависимости от разности фаз будет наблюдаться усиление или ослабление интенсивности света. Обычно *интерференционная картина* имеет вид чередующихся темных и светлых полос. В случае белого света максимумы для различных длин волн располагаются в разных местах, из-за чего интерференционные полосы расширяются и приобретают радужную окраску. Для наблюдения интерференции с помощью обычного источника используют метод разделения светового потока на два. В каждом из них представлены излучения одних и тех же атомов, т.е., излучения когерентны.

Световые лучи от источников S_1 и S_2 проходят пути x_1 и x_2 соответственно и интерферируют в точке А. Расстояние от источника света до точки наблюдения интерференции называется *геометрическим путем*. Следовательно, расстояние x_1 – геометрический путь первого луча, а расстояние x_2 – геометрический путь второго луча (рис. 5). Разность геометрических путей $\Delta = x_1 - x_2$ называется *геометрической разностью хода*. Если свет распространяется в среде с показателем преломления n , то луч проходит *оптический путь* – произведение геометрического пути x на показатель преломления n : $l = x \cdot n$. Разность оптических путей называется *оптической разностью хода*: $\Delta = x_1 n_1 - x_2 n_2$.

Используя связь разности хода с разностью фаз $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$, можно выразить условия максимума и минимума интерференции через разность хода $\Delta = \frac{\lambda \cdot \Delta\varphi}{2\pi}$. Подставляя в формулу $\Delta\varphi = 2m\pi$ (где

$m=1,2,3\dots$), получим *условие интерференционного максимума* $\Delta_{\max} = m\lambda$ ($m=1,2,3\dots$). Подставив $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ (где $m=1,2,3\dots$), получим *условие интерференционного минимума* $\Delta_{\min} = (2m+1)\lambda/2$ ($m=1,2,3\dots$).

2.3. Методы наблюдения интерференционной картины. Метод Юнга

В 1803г. английский физик Т. Юнг с помощью двух щелей получил на экране интерференционную картину. Его опыт заключался в следующем: источником света служила ярко освещенная щель S , от которой световая волна падала на две узкие равноудаленные щели S_1 и S_2 , параллельные S (рис.8). Щели S_1 и S_2 можно считать когерентными источниками света. Волны, идущие от щелей S_1 и S_2 , пройдя расстояние l_1 и l_2 , накладываются друг на друга, интерferируют, и на экране наблюдается картина интерференции. Результат интерференции в любой точке M экрана зависит от разности хода $\Delta = l_2 - l_1$. В тех местах экрана, где выполняется условие $\Delta = m \cdot \lambda$ (где $m=1,2,3\dots$), наблюдается интерференционный максимум, где $\Delta = (2m+1) \lambda / 2$ – наблюдается минимум интерференции. При освещении щелей монохроматическим светом на экране наблюдается чередование светлых и темных полос. При освещении белым светом

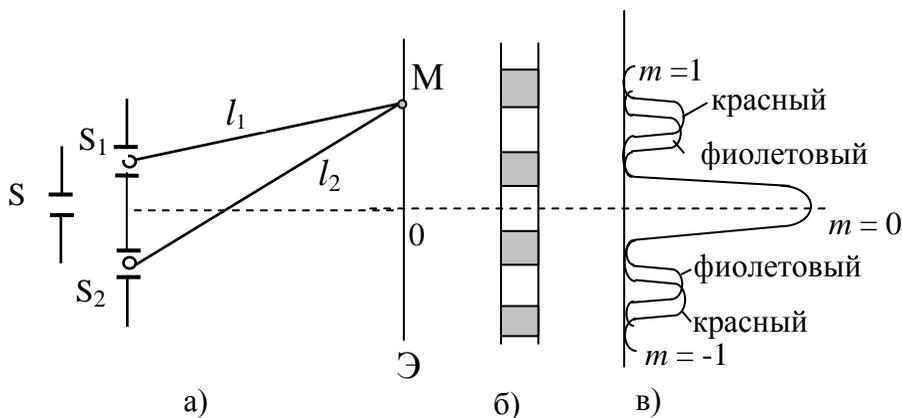


Рис. 8. Схема интерференционной картины

максимумы картины радужно окрашены. В середине картины наблюдается белая полоса (максимум нулевого порядка при $m=0$).

2.4. Интерференция света в тонких пленках

Картина интерференции наблюдается на экране в результате наложения отраженных световых волн от верхней и нижней поверхностей пленки.

Расстояние от пленки до глаза больше толщины пленки d , поэтому можно считать, что

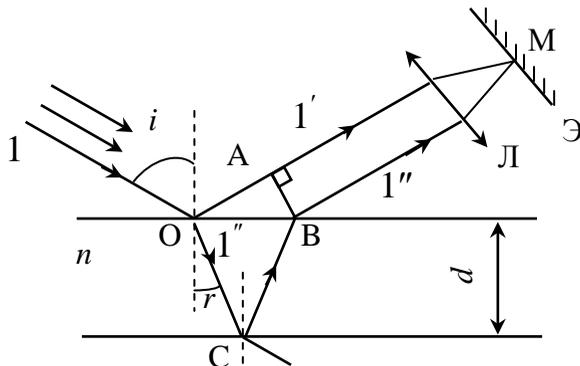


Рис. 9. Интерференция света в плоскопараллельной пленке

падающие лучи параллельны. Лучи $1'$ и $1''$ в бесконечности накладываются друг на друга. Из точки В опустим перпендикуляр на луч $1'$ (рис. 9). Отрезок АВ представляет собой фронт волны. Разность хода между лучами $1'$ и $1''$ составляет $\Delta = n \cdot (OC + CB) - (OA + \lambda/2)$. При отражении световой волны от более плотной среды (верхняя грань пластинки) ее фаза меняется на противоположную, что соответствует потере полуволны $\lambda/2$. В точке М может наблюдаться максимум или минимум интерференции в зависимости от оптической разности хода, которая равна:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \lambda/2$$

Если $\Delta = m\lambda$, то наблюдается максимум интерференции, при $\Delta = (2m+1)\lambda/2$ – минимум.

Если на пленку падает белый свет, то точка М будет окрашена в тот цвет, для которого выполняется условие максимума.

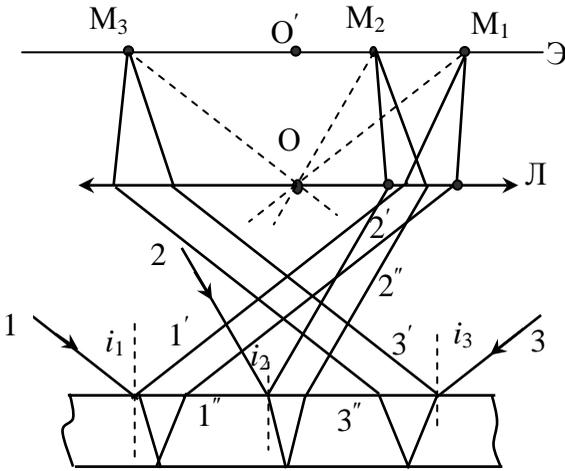


Рис. 10. Полосы равного наклона

1. Полосы равного наклона.

Такая картина наблюдается на экране при отражении светового потока от нижней и верхней поверхностей плоскопараллельной пластинки (рис.10). Картина интерференции называется **полосы равного наклона**, т.е. полосы возникают в результате наложения лучей, падающих под одним углом (i_1, i_2, i_3, \dots).

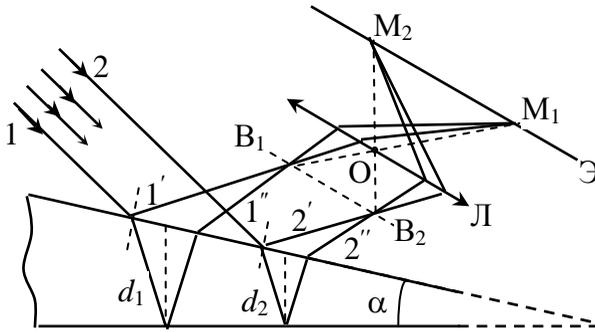


Рис.11. Интерференция света в клине

2. Полосы равной толщины.

Данная картина интерференции наблюдается в лучах, отраженных от нижней и верхней поверхностей прозрачной пластинки с непараллельными гранями (клин).

Интерференция реализуется вблизи поверхности клина (рис.11). Каждая из полос возникает за счет отражения лучей от мест одинаковой толщины и имеющих одинаковую разность хода. i, n, λ – постоянны, $d \neq const$.

3. Кольца Ньютона.

Кольца Ньютона – частный случай полос равной толщины (рис.12). Роль клина играет воздушный зазор между поверхностью плоскопараллельной пластинки и плосковыпуклой линзы. Лучи падают вертикально параллельным потоком и разность хода $\Delta = 2dn + \lambda/2$, $\sin i = 0$, так как $i = 0$. Так как толщина воздушной прокладки меняется симметрично относительно точки касания линзы с пластинкой, интерференционные полосы имеют форму колец. При освещении монохроматическим светом наблюдается чередование темных и светлых колец, при освещении белым светом – кольца разноцветные. В центре колец наблюдается темное кольцо, так как вследствие $\lambda/2$ при отражении лучей от более плотной среды условия \max и \min изменяются на обратные.

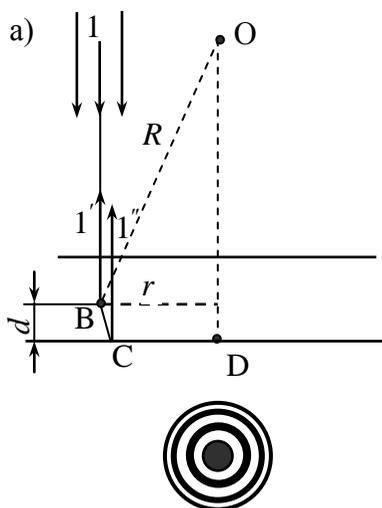


Рис. 12. Кольца Ньютона;
а – оптическая схема,
б – интерференционная картина

2.4. Дифракция света

Дифракция света – это совокупность явлений, которые наблюдаются при его распространении в среде с резко выраженными оптическими неоднородностями (отверстие в малых экранах, вблизи границ непрозрачных тел) или при огибании светом встречных препятствий с заходом в область геометрической тени.

Дифракция наблюдается, если размеры неоднородности сравнимы с длиной волны света. Дифракцию можно объяснить с точки зрения волновой природы света.

Между интерференцией и дифракцией заметных отличий нет. Интерференция – это перераспределение интенсивности при наложении волн от конкретного числа когерентных источников. Дифракция – это тоже перераспределение интенсивности световых волн, но при наложении волн от когерентных источников, расположенных непрерывно.

Принцип Гюйгенса – все точки волновой поверхности от источника света S следует рассматривать как источники вторичных волн, причем вторичные волны излучаются только вперед (рис.13).

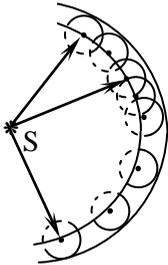


Рис. 13. Принцип Гюйгенса

Этот принцип позволяет построить фронт волновой поверхности, но не позволяет определить амплитуду волны в каждой точке пространства. Эту задачу можно решить с помощью *метода Гюйгенса-Френеля*. Френель дополнил принцип Гюйгенса идеей о когерентности и интерференции вторичных волн, т.е. амплитуду в каждой точке пространства можно найти как результат суперпозиции вторичных

волн от каждого элемента поверхности dS (рис.14)

$$S = \int k(\theta) \frac{E_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \text{ где}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

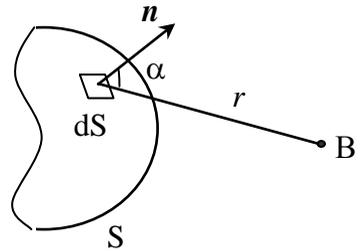


Рис. 14. Иллюстрация принципа Гюйгенса-Френеля

Вычисление амплитуды в т. Р связано с вычислением сложного интеграла. Френель упростил решение этой задачи, применив при этом метод деления волновой поверхности на зоны и заменив действие источника S действием воображаемых источников, расположенных на волновой поверхности Φ (фронт волны). Он разбил волновую поверхность на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояние от краев зоны до точки Р отличались на $\lambda/2$ (рис.15).

Амплитуда в т. Р равняется $A=A_1-A_2+A_3-A_4+\dots\pm A_n$, т.к. колебания от соседних зон приходят в т. Р в противофазе.

Действие отдельных зон, как предположил Френель, в точке Р тем меньше, чем больше угол φ_m между нормалью \vec{n} к поверхности зоны и направлением на т. Р, т.е. действие зон постепенно убывает: $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ и амплитуду k-ой зоны A_k можно представить как среднее арифметическое амплитуд примыкающих зон (k-1) и (k+1)

$$A_k = \frac{(A_{k-1} + A_{k+1})}{2}$$

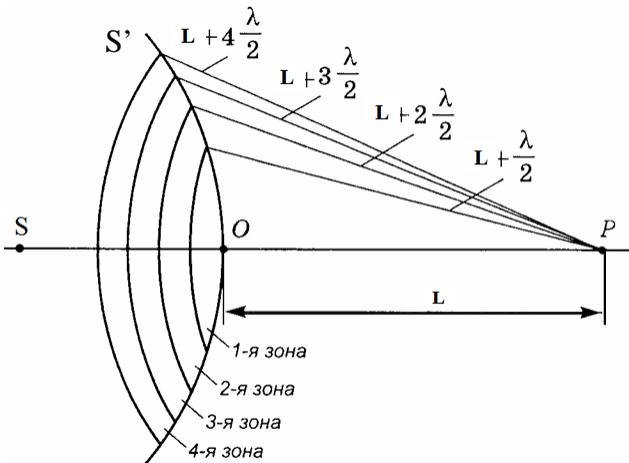


Рис. 15. Иллюстрация к методу зон Френеля

Результирующую амплитуду в т. Р можно переписать:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} + A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}$$

Таким образом, амплитуда, создаваемая в т. Р сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной центральной зоной, т.к. $\frac{A_m}{2} \approx 0$.

Следовательно, распространение света от S к P происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень узкого канала вдоль SP, т.е. прямолинейно. Это справедливо для однородных сред.

1. Дифракция на круглом отверстии и диске

Вид картины дифракции от круглого отверстия (рис.16) зависит от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстии:

$A = \frac{1}{2} A_1 \pm \frac{A_m}{2}$ («+» – нечетная, «-» – четная зона). Если открывается нечетное число зон Френеля, интенсивность амплитуды в точке P больше, чем при свободном распространении. Если число зон четное, то $A(P)=0$. Если $m=1$,

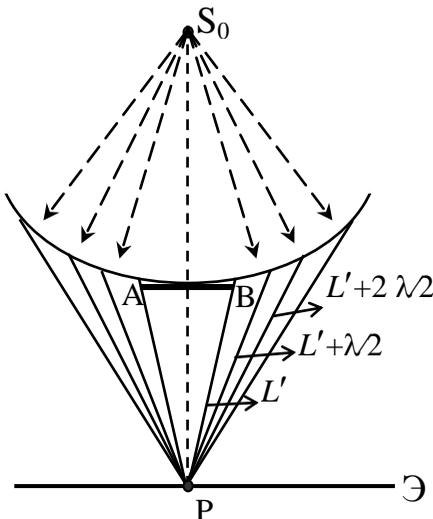


Рис. 17. Дифракция на диске

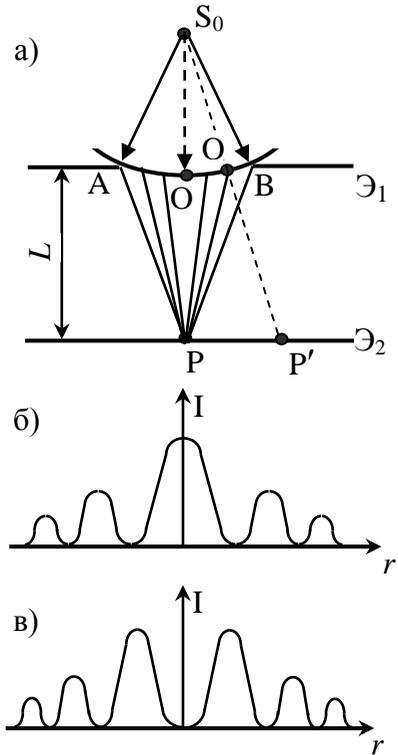


Рис. 16. а – дифракция на круглом отверстии, б – зависимость интенсивности света I от расстояния r от центра экрана для нечетного числа m ; в – для четного числа m

амплитуда $A=A_1$, вдвое больше, чем в свободном распространении. Картина дифракции имеет вид чередующихся колец (с центром светлое или темное кольцо).

При рассмотрении дифракции от диска (рис.17)

нужно исключить из рассмотрения зоны Френеля, закрытые диском, и рассматривать открытые зоны. В точке Р будет чередование темных и светлых колец в центре со светлым пятном, т.к. $A = \frac{A_m}{2}$, A_m – амплитуда первой открытой зоны.

2. Дифракция Фраунгофера в параллельных лучах

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от бесконечно длинной щели шириной a (рис.18). Для наблюдения этого вида дифракции источник света S помещают в фокусе линзы, в этом случае на щель падает плоская волна нормально плоскости щели. Картина дифракции исследовалась в фокальной плоскости второй собирающей линзы.

Оптическая разность хода крайних лучей $\Delta = B \cdot C = a \cdot \sin \varphi$. Волновую поверхность в плоскости щели разбиваем на зоны Френеля.

Ширина зоны выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон была равна $\lambda/2$. Всего на ширине щели укладывается $\frac{\Delta}{\lambda/2}$ зон. Число зон,

укладывающихся на щели, зависит от угла дифракции – φ . Если число зон четное, наблюдаем min картины дифракции в точке Р: $a \cdot \sin \varphi = 2m \cdot \lambda/2$ ($m=1,2,3,\dots$). Если число зон нечетное: $a \cdot \sin \varphi = (2m+1) \cdot \lambda/2$, наблюдается дифракционный max. В направлении $\varphi=0$ наблюдается центральный максимум.

Вся картина дифракции представляет собой чередование светлых и темных полос с центральной светлой полосой. Если свет белый, картина дифракции радужно окрашена.

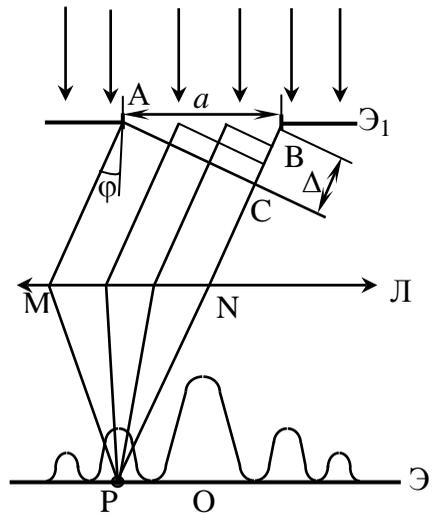


Рис. 18. Дифракция плоской волны от щели

3. Дифракционная решетка

Дифракционная решетка представляет собой стеклянную пластинку с системой параллельных щелей равной ширины, разделенных непрозрачными участками (рис.19). Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей (интерференция когерентных дифрагированных пучков света)

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально плоскости решетки. Рассмотрим дифракцию на двух щелях. Ширина щели – a , непрозрачного участка – b , $d=a+b$ – период (постоянная) дифракционной решетки. Для двух параллельных потоков из точек А и В, идущих под углом φ , разность хода $\Delta=(a+b)\sin\varphi= d\cdot\sin\varphi$. Главные минимумы при двух щелях, как и при одной, наблюдаются при условии $\Delta=a\cdot\sin\varphi=\pm m\lambda=2m\cdot\lambda/2$ ($m=1,2,3\dots$).

Дополнительные минимумы возникают при условии

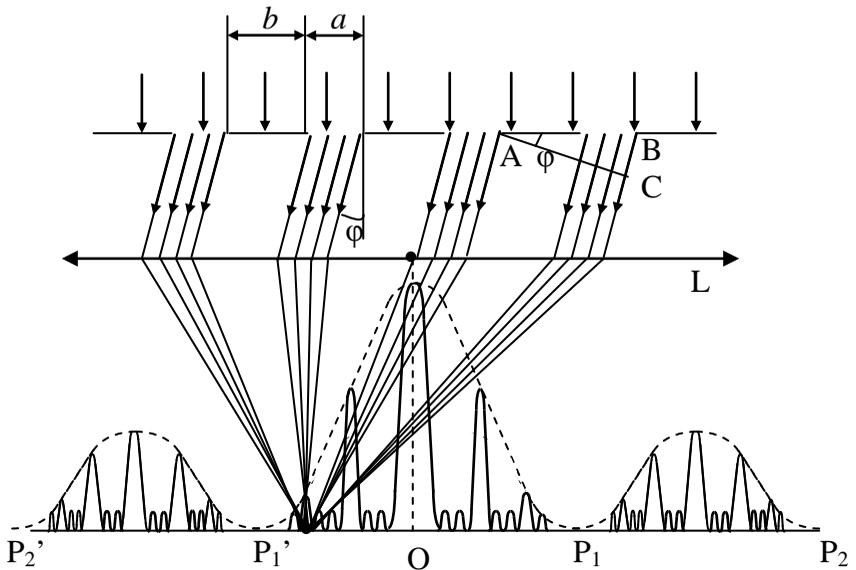


Рис. 19. Дифракция света на одномерной решетке

$\Delta=d\cdot\sin\varphi=(2m+1)\cdot\lambda/2$, и действие одной щели будет усиливать

действие другой при условии $\Delta = d \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda = 2m \cdot \lambda / 2$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$) – условие главных максимумов.

- 1) Лучи, падающие под углом $\varphi = 0$, попадут в т. О и создают главный max при $m = 0$.
- 2) Максимумы, соответствующие $m = \pm 1, \pm 2 \dots$, располагаются симметрично относительно центрального максимума.

Между главными max располагаются дополнительные min.

Максимальное число наблюдаемых главных максимумов можно оценить, воспользовавшись формулой $d \sin \varphi = m \lambda$, если $\varphi = \pi / 2$, $k_{\max} = d / \lambda$.

Если на решетку падает белый свет, дифракционный спектр окрашен. В максимумах наблюдалось чередование цветов от фиолетового до красного, обусловленное условием максимума. Дифракционная решетка используется для определения длин волн излучения без искажения спектрального состава.

Разрешающая способность дифракционной решетки $R = mN$, где m – максимальный порядок разрешения, N – число щелей решетки, или $R \approx d / \lambda$, где d – абсолютное значение минимальной разности длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются отдельно не накладываясь.

4. Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа-Брэггов

Представив кристалл в виде совокупности параллельных кристаллографических плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии $d \approx 10^{-10}$ м, можно наблюдать дифракцию в области рентгеновского излучения $d \sim \lambda$, $\lambda = 10^{-10}$ м. Поток монохроматических рентгеновских волн возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн $1'$ и $2'$, интерферирующих между собой (рис. 20). Максимум дифракции наблюдается, если $\Delta = 2d / \sin \theta = 2k \cdot \lambda / 2$, где θ – угол

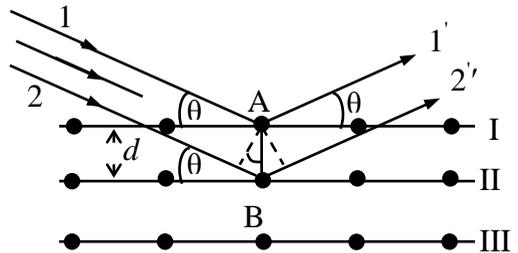


Рис. 20. К выводу формулы Вульфа – Брэгга.

скольжения лучей (угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью). *Это формула Вульфа-Брэггов.* Наблюдаемая дифракция в кристаллах позволяет определить их структуру, измерить θ , m и найти межплоскостное расстояние d .

2.5. Поляризация света

Свет – электромагнитные колебания, представляющие собой совместные колебания электрических и магнитных полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos \omega t$$

Вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются в одной фазе во взаимно перпендикулярных плоскостях.

В общем случае естественный монохроматический свет представляет собой излучение различных атомов, поэтому колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} совершаются беспорядочно в различных плоскостях перпендикулярно вектору скорости \vec{v} .

Свет со всевозможными равновероятными ориентациями вектора \mathbf{E} (и \mathbf{H} тоже) относительно вектора скорости \vec{v} называется *естественным* (рис.21). Свет, у которого колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} строго упорядочены и с течением времени не изменяются, называется поляризованным. Различают несколько видов поляризованного света:

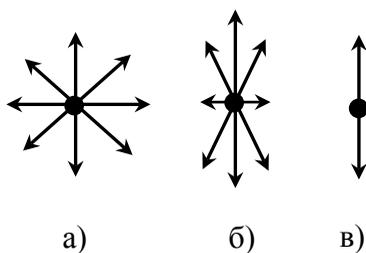


Рис.21. Виды света:

а – естественный;

б – частично поляризованный;

в – поляризованный.

1) *поляризованный по кругу.* Конец вектора \mathbf{E}

изменяется по закону

$$E_x = E_1 \cos \omega t, \quad E_y = E_2 \sin \omega t,$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y;$$

2) *эллиптически поляризованный свет* $\mathbf{E}_1 \neq \mathbf{E}_2$;

3) *Линейно поляризованный свет.*

Для получения поляризованного света используется *анизотропная среда*, оптические свойства которой зависят от направления распространения света.

Анизотропной средой являются кристаллические тела с невысоким типом симметрии. Естественный свет можно преобразовать в плоскополяризованный с помощью *поляризатора*, пропускающего колебания только одного направления. Рассмотрим опыты с турмалином – природным кристаллом. Если направить естественный свет перпендикулярно пластинке турмалина, вырезанной параллельно главной оптической оси кристалла OO' , то

при вращении пластинки вокруг направления распространения луча интенсивность света не будет изменяться (рис.22). Если поставить вторую пластинку турмалина и вращать ее вокруг направления распространения луча, то интенсивность света, прошедшего через пластины, изменяется в зависимости от угла между оптическими осями пластинок T_1 (поляризатор), T_2 (анализатор).

$$I_A = I_{\Pi} \cos^2 \alpha,$$

где I_{Π} – интенсивность поляризованного света, I_A – интенсивность света, вышедшего из анализатора T_2 . При $\alpha = \pi/2$ наблюдается полное гашение света. При $\alpha = 0$, $I_A = I_{\max} = I_{\Pi}$.

Первая пластинка поляризует естественный

Поляризатор Анализатор

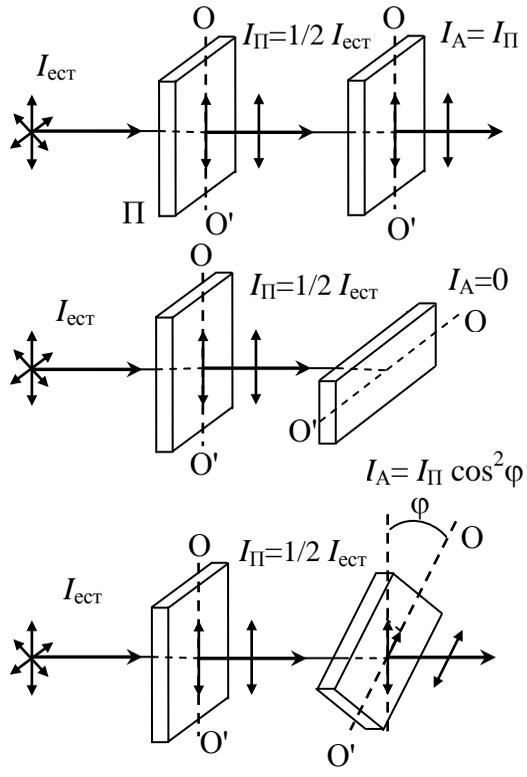


Рис. 22. Анализ поляризованного света

свет, вторая – пропускает ту часть его, которая параллельна главной оптической оси пластинки T_2 .

1. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков

Если угол падения естественного света на границу раздела двух диэлектриков отличен от нуля, то часть его отражается, часть преломляется во вторую среду. Устанавливая на пути отраженного и преломленного лучей анализатор, можно заметить, что отраженный и преломленный лучи частично поляризованы. Степень поляризации зависит от угла падения и показателей преломления сред (рис.23).

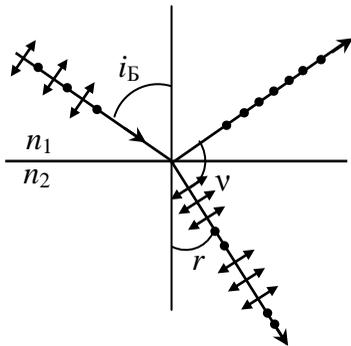


Рис. 23. Иллюстрация закона Брюстера

Брюстер открыл, что при определенном угле падения i_B (угол Брюстера), удовлетворяющему условию $\text{tg } i_B = n_{21}$, где n_{21} – относительный показатель преломления второй среды относительно первой, отраженный луч полностью плоскополяризован, а преломленный – максимально поляризован. При этом угле i_B лучи преломленный и отраженный взаимно перпендикулярны – $\beta = \pi/2$.

2. Двойное лучепреломление

Кристаллы, обладающие анизотропными свойствами, обладают способностью двойного лучепреломления. Это явление было обнаружено на кристалле исландского шпата (рис.24). Луч, который

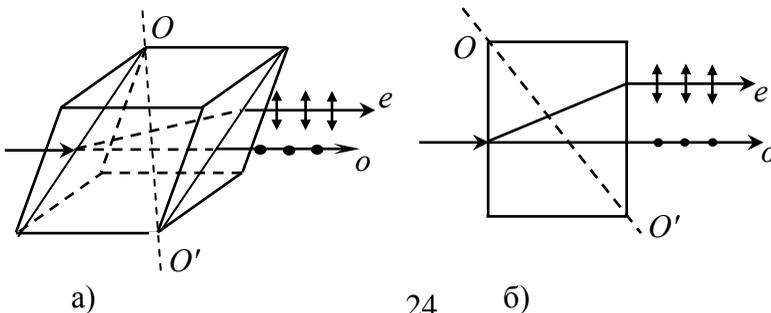


Рис. 24. а – двойное лучепреломление в кристалле. Обыкновенный и необыкновенный лучи; б – главное сечение кристалла

подчиняется законам преломления, называется *обыкновенным*. Второй луч – *необыкновенный*, скорость его распространения в кристалле зависит от направления распространения. В кристалле существует направление, вдоль которого двойное лучепреломление не наблюдается – *оптическая ось*. Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главным оптическим сечением*. Лучи обыкновенный и необыкновенный являются поляризованными. Плоскость колебаний необыкновенного луча параллельна оптическому сечению, обыкновенного – перпендикулярна плоскости оптического сечения. Оба луча при выходе из кристалла ничем не отличаются друг от друга, имеют лишь взаимно перпендикулярные плоскости поляризации.

Призма Николя – основной тип поляризатора, представляет собой двойную призму из кристалла исландского шпата, склеенную канадским бальзамом (рис.25). Призмы вырезаны так, что угол между оптической осью и входной гранью равен 48° . Падая на грань призмы AC, естественный луч раздваивается на два – обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный луч отражается от грани АВ и при определенном угле падения поглощается зачерненной поверхностью грани СВ. Необыкновенный луч выходит из призмы плоскополяризованным.

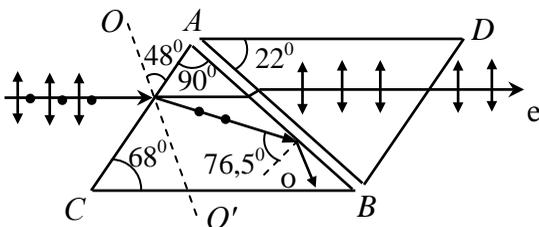


Рис.25. Призма Николя

3. Интерференция поляризованного света

Оптическая система – поляризатор, двоякопреломляющая пластинка, анализатор – позволяет наблюдать явление интерференции света (рис.26). Призма Николя позволяет получить плоскополяризованный свет, который далее проходит двоякопреломляющую пластинку, в которой наблюдается двойное лучепреломление.

Лучи обыкновенный и необыкновенный имеют постоянную разность фаз, зависящую от толщины пластинки d и показателей

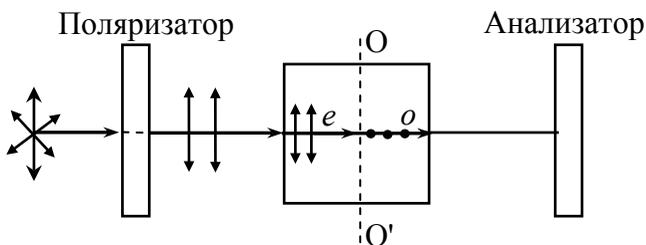


Рис. 26. Интерференция поляризованного света

преломления обыкновенного и необыкновенного лучей – n_o и n_e но плоскости колебаний их взаимно перпендикулярны, и интерференцию наблюдать нельзя. Если по ходу этих лучей поставить анализатор, то от двух лучей он пропускает составляющие, плоскости колебаний которых будут лежать в одной плоскости. Лучи будут когерентны, и после анализатора можно наблюдать картину интерференции.

Разность хода лучей $\Delta = (n_o - n_e)d$, разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} = (n_o - n_e) \cdot d, \text{ где } d \text{ – толщина пластинки, } n_o \text{ и } n_e \text{ – показатели}$$

преломления обыкновенного и необыкновенного лучей.

4. Искусственная оптическая анизотропия

Двойное лучепреломление имеет место в естественных анизотропных средах. Существуют, однако, различные методы наблюдения искусственной оптической анизотропии. Оптически изотропные вещества (оптические свойства в таких средах не изменяются) становятся оптически анизотропными, т.е. наблюдается двойное лучепреломление под действием:

- 1) механической деформации (сжатие, растяжение, изгиб);
- 2) электрического поля (эффект Керра); это явление объясняется различной поляризуемостью молекул жидкости по разным направлениям. Разность хода $\Delta = l(n_o - n_e) = k \cdot l \cdot E^2$, где E – напряженность электростатического поля, k – постоянная, характеризующая вещество, l – толщина слоя;

- 3) магнитного поля (эффект Фарадея), где разность хода $\Delta = l(n_o - n_e) = c \cdot l \cdot H^2$, c – постоянная Коттона-Мутона, зависящая от природы вещества, длины волны λ_0 и температуры.

5. Вращение плоскости поляризации

Некоторые твердые вещества (сахар, кварц, киноварь) и жидкости (раствор сахара, винная кислота, скипидар), называемые оптически активными, обладают способностью вращать плоскость поляризации. Если между скрещенными поляризатором и анализатором (П и А), дающими темное поле зрения, поместить оптически активное вещество, поле зрения анализатора просветляется. При повороте анализатора на некоторый угол φ можно вновь получить затемненное поле зрения прибора. Угол φ – это и есть угол поворота плоскости поляризации. Опыт показывает, что $\varphi = [\alpha]d$ для твердых веществ, $\varphi = [\alpha]cd$ для жидкостей, где $[\alpha]$ – удельное вращение, d – толщина слоя, c – концентрация жидкости. Это свойство веществ обусловлено строением молекул и особенностями расположения частиц в кристаллической решетке. Данное явление используется для изучения оптических свойств веществ, определения их концентрации.

2.6. Дисперсия света

Дисперсией света называется явление зависимости показателя преломления n вещества от частоты ν (длины волны λ) света или зависимость фазовой скорости v световых волн от его ν и представляется в виде зависимости $n = f(\lambda)$.

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении через стеклянную треугольную призму (рис.27). Свет более коротких длин волн (фиолетовых) преломляется призмой больше, чем длинных (красных). Световые лучи располагаются в спектре по значениям показателя преломления n , который для всех прозрачных веществ с увеличением длины волны уменьшается.

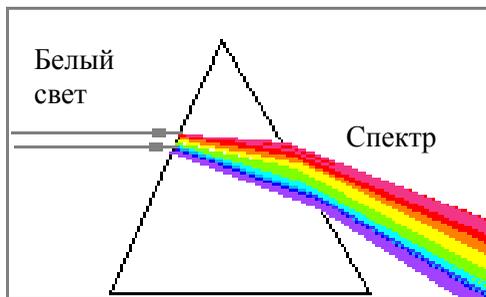


Рис. 27. Дисперсия света в стеклянной призме

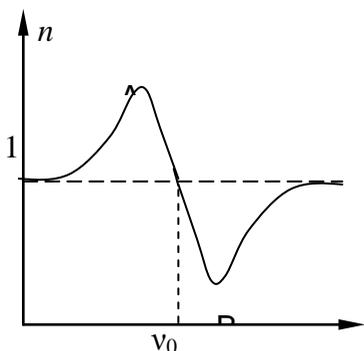


Рис. 28. Нормальная и аномальная дисперсия света в веществе

Отношение $D = \frac{dn}{d\nu}$, или $D =$

$\frac{dn}{d\lambda}$ называется *дисперсией вещества*.

Зависимость $n(\nu)$ или $n(\lambda)$ имеет нелинейный и немонотонный характер. Существуют области частот, для которых n увеличивается с ростом ν (или, что то же самое, уменьшается с ростом λ). Для этих областей

выполняются условия: $\frac{dn}{d\nu} > 0$, $\frac{dn}{d\lambda} < 0$.

В данном случае мы имеем дело с *нормальной* дисперсией света (рис.28). Нормальная дисперсия наблюдается у веществ, прозрачных для света.

Первые исследования дисперсии проведены Ньютоном. Величина дисперсии различна для разных сред.

Дисперсия света называется *аномальной*, если с ростом частоты показатель преломления уменьшается (или с ростом длины волны – увеличивается), т.е. $\frac{dn}{d\nu} < 0$, $\frac{dn}{d\lambda} > 0$.

У обычного стекла аномальная дисперсия обнаруживается в ультрафиолетовом и инфракрасном диапазоне световых волн. При аномальной дисперсии групповая скорость больше фазовой $u > v$.

Явление дисперсии объясняется с помощью электронной теории Лоренца. В этой теории дисперсия света рассматривается как результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны с частотой данной волны. При приближении частоты световой волны к частоте собственных колебаний электронов возникает явление резонанса, связанное с поглощением света. На рисунке 28 АВ – область аномальной дисперсии, которая наблюдается вблизи

резонансной частоты ν_0 , остальные участки описывают нормальную дисперсию.

2.7. Поглощение света

Явление потери энергии световой волной, проходящей через вещество, вследствие преобразования энергии волны в другие формы энергии (внутреннюю энергию, энергию вторичных колебаний) называется *поглощением света*. Данное явление в веществе описывается законом Бугера

$$I = I_0 e^{-kx},$$

где I и I_0 – интенсивность плоской монохроматической световой волны на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x , k – коэффициент поглощения. Коэффициент поглощения зависит от длины волны и для различных сред различен. Например, одноатомные газы и пары металлов (где атомы можно считать далеко удаленными друг от друга) обладают коэффициентом k , близким к нулю ($k \sim 0$). Лишь для очень узких спектральных областей наблюдаются резкие максимумы – *линейчатый спектр поглощения*. Эти частоты соответствуют собственным частотам колебаний электронов в атомах ($k \approx 10^{-12} - 10^{-11}$ м). Спектры поглощения атомов в молекулах характеризуются полосами поглощения ($k \approx 10^{-10} - 10^{-7}$ м). Коэффициент поглощения диэлектриков невелик. Они имеют сплошной спектр, широкие полосы ($k \approx 10^{-3} - 10^{-5}$ м). Коэффициент поглощения металлов имеет большие значения. Металлы непрозрачны для света. Энергия световой волны в металлах быстро переходит в тепловую. Чем выше проводимость металлов, тем сильнее поглощение вследствие возникновения переменных токов (движение свободных электронов).

Для разбавленных растворов процесс поглощения подчиняется *закону Бугера-Ламберта-Бера*:

$$I = I_0 e^{-\epsilon c x},$$

где ϵ – постоянная Бера, c – концентрация раствора, x – толщина слоя.

Зависимостью коэффициента поглощения от длины волны объясняется окрашенность поглощающих тел. Например, если на стекло, поглощающее зелено-синие лучи, направить белый свет, то

оно будет казаться красным. Если направить зелено-синие лучи на это стекло, оно будет выглядеть черным. Это явление используется для изготовления светофильтров.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Сферическая поверхность плосковыпуклой линзы ($n=1,52$) соприкасается со стеклянной пластинкой ($n=1,70$). Пространство между линзой, радиус кривизны которой $R=1,00\text{м}$, и пластинкой заполнено жидкостью. Наблюдая кольца Ньютона в отраженном свете ($\lambda_0 = 0,589\text{мкм}$), измерили радиус r десятого темного кольца. Определить показатель преломления жидкости $n_{\text{ж}}$ в двух случаях:

1) $r = 2,05\text{мм}$; 2) $r = 1,9\text{мм}$.

Дано: $n_1=1,52$, $n_2=1,70$, $R=1,00\text{м}$,

$\lambda_0=0,589\text{мкм}=0,589 \cdot 10^{-6}\text{м}$,

$r_1=2,05\text{мм}=2,05 \cdot 10^{-6}\text{м}$, $r_2=1,9\text{мм}=1,9 \cdot 10^{-6}\text{м}$, $k = 10$.

Найти: $n_{\text{ж}1}$; $n_{\text{ж}2} - ?$

Решение: Искомый показатель преломления $n_{\text{ж}}$ не входит в явном виде в формулу для радиусов темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{kR\lambda} \quad (k = 0,1,2,3,\dots) \quad (1)$$

и формулу для радиусов светлых колец:

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\lambda/2} \quad (k = 1,2,3,\dots), \quad (2)$$

где R – радиус кривизны поверхности линзы; λ – длина световой волны в среде между линзой и пластинкой; k – порядковый номер кольца ($k=0$ соответствует центральному темному пятну).

Однако этот показатель легко ввести в формулы (1) и (2), если воспользоваться соотношением между длиной волны λ , скоростью света c и частотой колебаний ν , а также зависимостью скорости c от показателя преломления среды:

$$\lambda = c/\nu = c_0/(n_{\text{ж}}\nu) = \lambda_0/n_{\text{ж}}, \quad (3)$$

где c_0 – скорость света в вакууме.

Прежде чем подставить значение λ из (3) в (1), обратим внимание на то, что эта формула выведена для случая, когда показатели преломления линзы и пластинки одинаковы. В этой задаче

это условие не соблюдено, так как пока неизвестен показатель преломления жидкости, нельзя решить вопрос о том, какая из формул (1), (2) относится к темным кольцам.

Предположим, что показатель преломления $n_{ж}$ удовлетворяет одному из двух неравенств:

$$n_{жс} < n_1 < n_2, \quad n_1 < n_2 < n_{жк}. \quad (4)$$

Тогда для темных колец по-прежнему будет верна формула (1). Отсюда, учитывая соотношение (3), получим

$$n_{жс} = kR\lambda_0 / r_k^2. \quad (5)$$

Выполнив вычисление, найдем: 1) $n_{ж1}=1,41$; 2) $n_{ж2}=1,63$.

Теперь сделаем единственно возможное другое предположение относительно величины $n_{ж}$:

$$n_1 < n_{жк} < n_2. \quad (6)$$

(Нельзя предположить, что $n=n_1$ и $n=n_2$, поскольку в этих случаях свет отражается от одной поверхности слоя жидкости, и колец Ньютона не будет) в этом случае для темных колец верна формула (2). Учитывая соотношение (3), получаем

$$n_{жк} = (2k-1)R\lambda_0 / (2r_k^2). \quad (7)$$

Выполнив вычисление по формуле (7), найдем: 1) $n_{ж1}=1,34$; 2) $n_{ж2}=1,55$.

Сравнив результаты вычислений по формулам (5), (7) для обоих случаев, которые соответствуют двум разным жидкостям, видим, что в первом случае ($n_{ж1}=1,41$; $n_{ж2}=1,63$) значения $n_{ж}$ удовлетворяют одному из неравенств (4), но не удовлетворяют неравенству (6). Следовательно, из двух формул (5), (7) правильный ответ дает формула (5), т.е. для первой жидкости $n_{ж1}=1,41$. Во втором случае ($n_{ж1}=1,34$; $n_{ж2}=1,55$) выполняется только неравенство (6). Следовательно, теперь правильный ответ дает формула (7), т.е. для второй жидкости $n_{ж2}=1,55$.

Задача 2. От двух S_1 и S_2 когерентных источников ($\lambda=0,8\text{мкм}$) лучи попадают на экран. На экране наблюдается интерференционная картина. Когда на пути одного из лучей перпендикулярно ему поместили мыльную пенку ($n=1,33$), интерференционная картина

изменилась на противоположную. При какой наименьшей толщине d_{\min} пленки это возможно?

Дано: $\lambda=0,8\text{мкм}=0,8\cdot 10^{-6}\text{м}$, $n=1,33$.

Найти: d_{\min} - ?

Решение: Изменение интерференционной картины на противоположную означает, что на тех участках экрана, где наблюдались интерференционные максимумы, стали наблюдаться

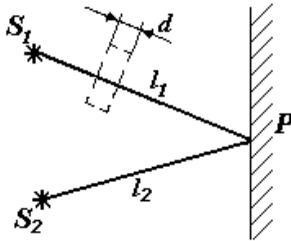


рис.1

интерференционные минимумы. Такой сдвиг интерференционной картины возможен при изменении оптической разности хода пучков световых волн на нечетное число половин длин волн, т.е.

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k + 1)\lambda/2, \quad (1)$$

где Δ_1 – оптическая разность хода пучков световых волн до внесения пленки;

Δ_2 – оптическая разность хода тех же пучков после внесения пленки; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Наименьшей толщине d_{\min} пленки соответствует $k = 0$. При этом формула (1) примет вид:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \lambda/2. \quad (2)$$

Выразим оптические разности хода Δ_2 и Δ_1 .

Из рис.1 следует, что

$$\Delta_1 = l_1 - l_2,$$

$$\Delta_2 = [(l_1 - d_{\min}) + nd_{\min}] - l_2 = (l_1 - l_2) + d_{\min}(n - 1).$$

Подставим выражения Δ_1 и Δ_2 в формулу (2):

$$(l_1 - l_2) + d_{\min}(n - 1) - (l_1 - l_2) = \lambda/2, \text{ или}$$

$$d_{\min}(n - 1) = \lambda/2. \text{ Отсюда}$$

$$d_{\min} = \lambda/[2(n - 1)].$$

Произведем вычисления:

$$d_{\min} = \frac{0,8 \cdot 10^{-6}}{2(1,33 - 1)} \text{ м} = 1,21 \text{ м}.$$

Задача 3. На стеклянный клин с малым углом нормально к его грани падает параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6\text{мкм}$. Число возникающих при этом

интерференционных полос, приходящихся на l см, равно 10. Определить угол α клина.

Дано: $\lambda=0,6\text{мкм}=0,6\cdot 10^{-6}\text{м}$, $k=10$, $l=1\text{см}=10^{-2}\text{м}$

Найти: $\alpha - ?$

Решение: Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти отраженные пучки света когерентны. Поэтому на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Так как угол клина мал, отраженные пучки 1 и 2 света (рис.2) будут практически параллельны.

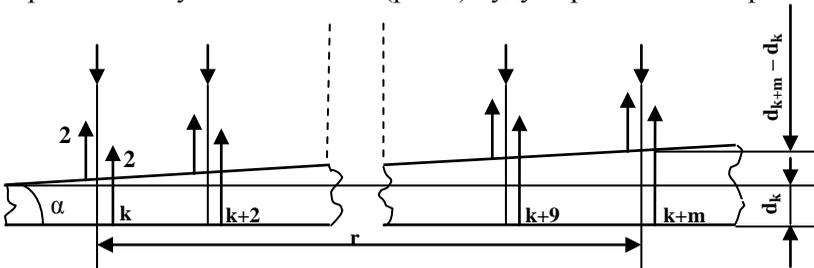


рис.2

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода лучей кратна нечетному числу половин длин волн:

$$\lambda = (2k + 1)\lambda/2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

Разность хода Δ двух волн складывается из разности оптических длин путей этих волн ($2dn\cos i_2$) и половины длины волны ($\lambda/2$).

Величина $\lambda/2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении световой волны 1 от оптически более плотной среды. Подставив в формулу (1) разность хода Δ световых волн, получим

$$2d_k n \cos i_2 + \lambda/2 = (2k + 1)\lambda/2, \quad (2)$$

где $n=1,5$ – показатель преломления стекла; d_k – толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k ; i_2 – угол преломления.

Согласно условию, угол падения равен нулю, следовательно, и угол преломления i_2 равен нулю, а $\cos i_2 = 1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (2), после упрощения получим

$$2d_k n = k\lambda \quad (3)$$

Пусть произвольной темной полосе k -го номера соответствует толщина d_k клина, а темной полосе $(k+m)$ -го номера – толщина d_{k+m} клина. Тогда на рис.2, учитывая, что m полос укладывается на расстоянии l , найдем

$$\sin \alpha = (d_{k+m} - d_k) / l \quad (4)$$

Выразим из равенства (3) d_k и d_{k+m} и подставим их в формулу (4). Затем, учитывая, что $\sin \alpha \approx \alpha$ (из-за малости угла α), получим

$$\alpha = \frac{(k+m)\lambda / (2n) - k\lambda / (2n)}{l} = \frac{m\lambda}{2nl}$$

Подставив значения физических величин, найдем

$$\alpha = \frac{10 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} \text{ рад} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

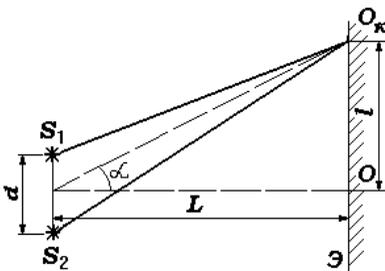
Выразим α в градусах. Для этого можно воспользоваться соотношением между радианом и секундой:

$$1 \text{ рад} = 206265'' \approx 2,06 \cdot 10^5'', \text{ т.е. } \alpha = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,06 \cdot 10^5'' = 41,2''.$$

Задача 4. Найти угловое расстояние между соседними светлыми полосами в опыте Юнга, если известно, что экран отстоит от когерентных источников света на $L=1\text{м}$, а пятая светлая полоса на экране расположена на расстоянии $l=1,5\text{мм}$ от центра интерференционной картины.

Дано: $L = 1\text{м}$, $k = 5$, $l = 1,5 \cdot 10^{-3}\text{м}$.

Найти: $\Delta\alpha - ?$



Решение: В точке O на экране, в центре интерференционной картины, будет максимальная освещенность, так как она равноудалена от источника света S_1 и S_2 и разность хода волн $|S_1 O| - |S_2 O|$ равна 0 (рис.3).

В произвольной точке экрана O_k максимум освещенности

будет наблюдаться, если разность

рис.3

хода волн ($S_1 O_k - S_2 O_k$) равна

целому числу длин волн:

$$\Delta = k\lambda, \quad (1)$$

где Δ – разность хода когерентных лучей; λ – длина световой волны; k – номер световой полосы (центральная световая полоса принята за нулевую).

Разность хода лучей:

$$\Delta = ld/L, \quad (2)$$

где d – расстояние между источниками света; L – расстояние от источников света до экрана.

Приравняем формулы (1) и (2): $ld/L = k\lambda$, откуда

$$l = kL\lambda/d, \quad (3)$$

Угловое положение интерференционной полосы на экране определяется углом α .

Из рисунка видно, что $tg\alpha = l/L$, или ввиду малости α

$$\alpha \approx l/L. \quad (4)$$

Решив уравнения (3) и (4), найдем

$$\alpha_{max} = k\lambda/d.$$

Угловое расстояние между соседними светлыми полосами

$$\Delta\alpha_{max} = k\lambda/d - (k-1)\lambda/d = \lambda/d. \quad (5)$$

Определив λ/d из уравнения (3) и подставив это отношение в (5), получим

$$\Delta\alpha_{max} = l/(kL); \quad \Delta\alpha = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} / (5 \cdot 1 \text{ м}) = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Задача 5. На дифракционную решетку с периодом $d=2\text{мкм}$ нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. Найти: 1) какую разность длин волн может разрешить эта решетка в области красных лучей ($\lambda_1=0,7\text{мкм}$) в спектре второго порядка, если ширина решетки $l=2,5\text{см}$; 2) на какую длину волны в спектре второго порядка накладывается синяя линия ($\lambda_2=0,447\text{мкм}$) спектра третьего порядка.

Дано: $d=2\text{мкм}=2\cdot 10^{-6}\text{м}$, $\lambda_1=0,7\text{мкм}=0,7\cdot 10^{-6}\text{м}$, $k_2=2$,
 $l=2,5\text{см}=2,5\cdot 10^{-2}\text{м}$, $\lambda_2=0,447\text{мкм}=0,447\cdot 10^{-6}\text{м}$, $k_3=3$.

Найти: $\Delta\lambda$ – ? λ_3 – ?

Решение: Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \lambda / \Delta\lambda = kN, \quad (1)$$

где N – общее число щелей; k – порядок спектра.

Период решетки $d = l / N_0$, где N_0 – число щелей на 1 м длины. Зная ширину l дифракционной решетки, находим общее число щелей решетки:

$$N = N_0 l = l / d. \quad (2)$$

Из формулы (1) с учетом (2) находим $\Delta\lambda = \lambda / kN = \lambda d / k \cdot l$;

$$\Delta\lambda = 7 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-6} / (2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}) \text{ м} = 0,28 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Направления на главные максимумы дифракционной решетки определяются условием:

$$d \sin \varphi = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

где φ – угол между направлением на дифракционный максимум и нормалью к решетке.

При наложении спектральных линий выполняется условие $d \sin \varphi = k_2 \lambda_2$, $d \sin \varphi = k_3 \lambda_3$ или $k_2 \lambda_2 = k_3 \lambda_3$, откуда

$$\lambda_3 = k_2 \lambda_2 / k_3 ;$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot 0,447 \cdot 10^{-6} / 3 \text{ м} = 2,98 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,298 \text{ мкм}$$

Задача 6. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол α между их плоскостями пропускания составляет 60° . Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность J_0 естественного света: 1) при прохождении через один николю N_1 ; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе $k=0,05$. Потери на отражение света не учитывать.

Дано: $\alpha=60^\circ$, $k=0,05$.

Найти: J_0/J_1 , J_0/J_2 – ?

Решение. Естественный свет, падая на грань призмы Николя (рис.4), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка:

обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения).

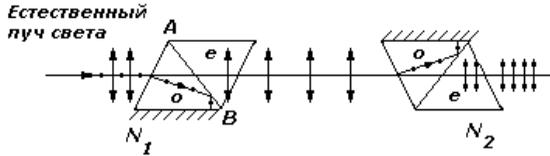


рис.4

Плоскость колебаний обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок света (о) вследствие полного отражения от границы АВ отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (е) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму:

$$J_1 = \frac{1}{2} J_0(1 - k)$$

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность J_0 естественного света, падающего на первый николю, на интенсивность J_1 поляризованного света:

$$\frac{J_0}{J_1} = \frac{J_0}{\frac{1}{2} J_0(1 - k)} = \frac{2}{1 - k} \quad (1)$$

Произведем вычисления: $\frac{J_0}{J_1} = \frac{2}{1 - 0,5} = 2,1$.

Таким образом, интенсивность уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный пучок света интенсивности J_1 падает на второй николю N_2 и также расщепляется на два пучка различной интенсивности: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается призмой, поэтому интенсивность его нас не интересует. Интенсивность

необыкновенного луча J_2 , вышедшего из призмы N_2 , определяется по закону Малюса (без учета поглощения света во втором николе):

$J_2 = J_1 \cos^2 \alpha$, где α – угол между плоскостью колебаний в поляризованном луче и плоскостью колебаний, пропускаемых никодем без ослабления.

Учитывая поток интенсивности на поглощение во втором николе, получим $J_2 = J_1(1 - k) \cos^2 \alpha$.

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность J_0 естественного света на интенсивность J_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{J_0}{J_2} = \frac{J_0}{J_1(1 - k) \cos^2 \alpha}$$

Выразив J_0/J_1 по формуле (1), получим

$$\frac{J_0}{J_2} = \frac{2}{(1 - k)^2 \cos^2 \alpha}$$

Подставляя данные, произведем вычисления:

$$\frac{J_0}{J_2} = \frac{2}{(1 - 0,05) \cos^2 60^\circ} = 8,86$$

Таким образом, после прохождения света через два николя, интенсивность его уменьшается в 8,86 раз.

Задача 7. Во сколько раз увеличится мощность излучения абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения передвинется от красной границы видимого спектра ($\lambda_{кр}=0,76\text{мкм}$) к его фиолетовой границе ($\lambda_{ф}=0,38\text{мкм}$)?

Дано: $\lambda_{кр}=0,76\text{мкм}=0,76 \cdot 10^{-6}\text{м}$, $\lambda_{ф}=0,38\text{мкм}=0,38 \cdot 10^{-6}\text{м}$.

Найти: $N_{ф}/N_{кр} = k$ – ?

Решение. Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, определяется из закона смещения Вина:

$$\lambda_{max} = c_1/T, \quad (1)$$

Где T – температура излучателя; $c_1=2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная закона смещения Вина.

По формуле (1) определяем температуру, соответствующую красной и фиолетовой границам видимой области спектра:

$$T_{кр} = c_1 / \lambda_{кр}, \quad T_{\phi} = c_1 / \lambda_{\phi}.$$

Мощность излучения абсолютно черного тела:

$$N = R_{\text{э}} \cdot S,$$

где $R_{\text{э}}$ – энергетическая светимость абсолютно черного тела; S – площадь поверхности излучающего тела.

В соответствии с законом Стефана-Больцмана

$$R_{\text{э}} = \sigma \cdot T^4, \quad (2)$$

где $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – постоянная Стефана-Больцмана.

Для красной и фиолетовой границ видимой области спектра

$$N_{кр} = \sigma \cdot T_{кр}^4 S, \quad N_{\phi} = \sigma \cdot T_{\phi}^4 S$$

Из формул (1) и (2) следует:

$$\frac{N_{\phi}}{N_{кр}} = \frac{\sigma S (c_1 / \lambda_{\phi})^4}{\sigma S (c_1 / \lambda_{кр})^4}, \quad \frac{N_{\phi}}{N_{кр}} = \frac{(c_1 / \lambda_{\phi})^4}{(c_1 / \lambda_{кр})^4}, \quad \frac{N_{\phi}}{N_{кр}} = \left(\frac{\lambda_{кр}}{\lambda_{\phi}} \right)^4.$$

Отношение $N_{\phi}/N_{кр} = k$ показывает, во сколько раз увеличивается мощность излучения абсолютно черного тела:

$$k = (0,76/0,38)^4 = 2^4 = 16.$$

Задача 8. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda_1=0,155 \text{ мкм}$; 2) γ -лучами с длиной волны $\lambda_2 = 0,01 \text{ А}$.

Дано: $\lambda_1=0,155 \text{ мкм}=0,155 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $\lambda_2 =0,01 \text{ А}=10^{-12} \text{ м}$.

Найти: $V_1, V_2 - ?$

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения для фотоэффекта:

$$E = A + W_{max}, \quad (1)$$

где E – энергия фотонов, падающих на поверхность металла;
 A – работа выхода; W_{max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Энергия фотона определяется по формуле:

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad (2)$$

где h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме; λ – длина волны.

Кинетическая энергия электрона может быть выражена или по классической формуле

$$W = \frac{m_0 V^2}{2}, \quad (3)$$

или по релятивистской формуле:

$$W = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \quad (4)$$

в зависимости от того, какая скорость сообщается фотоэлектрону. Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия E фотона много меньше энергии покоя E_0 электрона, то может быть применена формула (3), если же E сравнима по величине с E_0 , то вычисление по формуле (3) приводит к ошибке, поэтому нужно пользоваться формулой (4).

1. Вычислим энергию фотона ультрафиолетового излучения по формуле (2):

$$E_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^{-7}} \text{ Дж} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж},$$

или

$$E_1 = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 8 \text{ эВ}.$$

Полученная энергия фотона (8 эВ) много меньше энергии покоя электрона $m_0 c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$. Следовательно, для данного случая кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (1) может быть выражена по классической формуле (3):

$$E_1 = A + m_0 V_{max}^2 / 2,$$

откуда

$$V_{max} = \sqrt{2(E_1 - A)/m_0}. \quad (5)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу скорости. Для это в правую часть формулы (5) вместо символа a в величин подставим обозначения единиц:

$$\left(\frac{[E_1 - A]}{[m_0]} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ м/с}.$$

Найденная единица является единицей скорости. Подставив значения величин в формулу (5), найдем

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2(1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18})}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

2. Вычислим энергию фотона γ -излучения:

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda}; \quad E_2 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} \text{ Дж} = 1,99 \cdot 10^{-13} \text{ Дж},$$

или во внесистемных единицах:

$$E_2 = \frac{1,99 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ эВ} = 1,24 \text{ МэВ}.$$

Работа выхода электрона ($A = 4,7 \text{ МэВ}$) пренебрежимо мала по сравнению с энергией фотона ($E_2 = 1,24 \text{ МэВ}$), поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона $W_{max} = E_2 = 1,24 \text{ МэВ}$. Так как в данном случае кинетическая энергия электрона больше его энергии покоя, для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии (4). Из этой формулы найдем

$$\beta = \sqrt{(2E_0 + W)W} / (E_0 + W).$$

Учитывая, что $V = c\beta$ и $W_{\max} = E_2$, получим

$$V_{\max} = c\sqrt{(2E_0 + E_2)E_2} / (E_0 + E_2).$$

Сделаем подстановку числовых значений величин (энергия E_0 и E_2 входят в формулу в виде отношения, поэтому их можно не выражать в единицах СИ) и произведем вычисления:

$$V_{\max} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{(2 \cdot 0,51 + 1,24)}{0,51 + 1,24}} \text{ м/с} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 9. Угол рассеяния фотона с энергией $E = 1,2 \text{ МэВ}$ на свободном электроне $\theta = 60^\circ$. Найти длину волны рассеянного фотоэлектрона, энергию и импульс электрона отдачи (кинетической энергией электрона до соударения пренебречь).

Дано: $\theta = 60^\circ$, $E = 1,2 \text{ МэВ} = 1,92 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$.

Найти: λ_2 , W_e , P_e – ?

Решение: Изменение длины волны при комптоновском рассеянии

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad (1)$$

где λ_1 и λ_2 – длины волн падающего и рассеянного фотонов; h – постоянная Планка; m_0 – масса покоя электрона; c – скорость света в вакууме; λ_c – комптоновская длина волны электрона.

Из формулы (1) находим $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1 + \lambda_c (1 - \cos \theta)$.

Выражая λ_1 через энергию фотона $E_1 = hc/\lambda$, получаем

$$\lambda_2 = hc/E_1 + \lambda_c (1 - \cos \theta). \quad (2)$$

Энергия электрона отдачи по закону сохранения энергии

$$W_e = E_1 - E_2.$$

Выразим изменение длины волны через изменение частоты:

$\Delta\lambda = c/\nu_2 - c/\nu_1 = c(\nu_2 - \nu_1)/(\nu_2 \cdot \nu_1)$. С учетом уравнения (1) можно написать:

$$\nu_2 - \nu_1 = \frac{h\nu_1 \cdot \nu_2}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta). \quad (3)$$

Умножив формулу (3) на h и учитывая, что $h\nu_1 = E_1$, $h\nu_2 = E_2$, $m_0c^2 = E_0$, $E_1 - E_2 = W_e$, получим

$$W_e = \frac{E_1^2(1 - \cos\theta)}{E_0 + E_1(1 - \cos\theta)}, \quad (4)$$

Где E_0 – энергия покоя электрона. Зная энергию электрона, найдем

$$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{W_e(W_e + 2E_0)} \quad (5)$$

Подставив числовые значения в формулы (2), (4) и (5), получим

$$\lambda_2 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,92 \cdot 10^{-13}} + 2,43 \cdot 10^{-12} \cdot (1 - 0,5) = 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ м};$$

$$W_e = \frac{(1,2)^2 \cdot 0,5}{0,511 + 1,2 \cdot 0,5} = 0,648 \text{ МэВ} = 1,04 \cdot 10^{-13} \text{ Дж};$$

$$p_e = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \sqrt{1,04 \cdot 10^{-13} (1,04 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0,82 \cdot 10^{-13})} =$$

$$= 5,55 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 10. Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 663 \text{ нм}$ падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток излучения $\Phi_e = 0,6 \text{ Вт}$. Определить: 1) силу давления F , испытываемую этой поверхностью; 2) число фотонов n_1 , ежесекундно падающих на поверхность.

Дано: $\lambda = 663 \text{ нм} = 663 \cdot 10^{-9} \text{ м}$, $\Phi_e = 0,6 \text{ Вт}$.

Найти: F , n_1 – ?

Решение: 1. Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления P на площадь S поверхности:

$$F = PS \quad (1)$$

Световое давление может быть найдено по формуле

$$P = E_0(\rho + 1)/c \quad (2)$$

где E_0 – энергетическая освещенность (облученность); c – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения.

Подставив правую часть выражения (2) в формулу (1), получим

$$P = E_0 S (\rho + 1) / c \quad (3)$$

Поскольку $E_0 \cdot S$ представляет собой поток излучения Φ_e ,

$$F = \Phi_e (\rho + 1) / c \quad (4)$$

Произведем вычисления, учитывая, что для зеркальной поверхности $\rho=1$:

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8} (1+1) H = 4 \cdot 10^{-9} \text{ H}.$$

2. Произведение энергии ε одного фотона на число фотонов n_1 , ежесекундно падающих на поверхность, равно мощности излучения, т.е. потоку излучения $\Phi_e = \varepsilon \cdot n_1$. Поскольку энергия фотона $\varepsilon = hc/\lambda$,

$$\Phi_e = hcn_1/\lambda,$$

откуда

$$n_1 = \Phi_e \lambda / (hc). \quad (6)$$

Произведем вычисления:

$$n_1 = \frac{0,6 \cdot 6,63 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} c^{-1} = 2 \cdot 10^{18} c^{-1}.$$

3. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

3.1 Тепловое излучение тел. Характеристики теплового излучения

Электромагнитное излучение, испускаемое атомами тела за счет внутренней (тепловой) энергии излучающего тела и зависящее только от температуры и оптических свойств данного тела, называется *тепловым*. Это единственный вид равновесного излучения, т.е. тело может находиться в состоянии *термодинамического равновесия* с нагретыми телами.

Характеристики теплового излучения:

1. *Энергетическая светимость* $R(T)$ - это электромагнитная энергия, испускаемая единицей поверхности нагретого тела во всех направлениях в единицу времени на всех частотах. Этот полный поток излучения всех волн называют также *интегральной светимостью* тела. Согласно определению

$$R(T) = \frac{dE_{\text{исп}}}{dSdt},$$

где $E_{\text{исп}}$ - энергия, испускаемая всем телом по всем частотам и направлениям за определенный промежуток времени.

2. Распределение энергии по длинам волн в излучении тел при заданной температуре T характеризуется *испускательной* или *излучательной способностью* $r_{\nu, T}$ или $r(\nu, T)$, равной энергии, испускаемой с единицы поверхности тела в единицу времени в единичном интервале частот. Функцию $r(\nu, T)$ часто называют спектральной плотностью энергетической светимости

$$r(\nu, t) = \frac{dE_{\text{исп}}}{dSdt d\nu}; \quad r(\lambda, t) = \frac{dE_{\text{исп}}}{dSdt d\lambda}.$$

Связь энергетической светимости и испускательной способности тела записывается следующим образом:

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} r(\nu, T) d\nu$$

3. Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется *поглощательной способностью* $a_{\nu,T}$ – отношением поглощенной энергии в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ к общему количеству энергии падающего излучения в том же интервале:

$$a(\nu, T) = \frac{dE_{\text{погл}}}{dE_{\text{пад}}}.$$

Поглощательная способность a – безразмерная величина.

Испускательная и поглощательная способности зависят от частоты излучаемых и поглощаемых волн, температуры тела, его химического состава и состояния поверхности. Все тела частично поглощают и частично отражают падающее на них излучение. *Абсолютно черным* называется тело, поглощающее все падающее на него излучение во всем диапазоне частот. Поглощательная

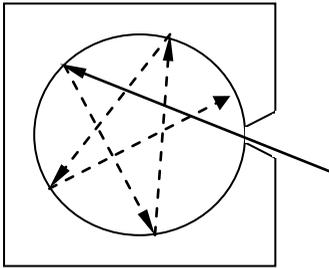


Рис.29. Модель абсолютно черного тела

способность абсолютно черного тела равна единице $a_{\nu,T} = 1$ при любой температуре T . На рис. 29 изображена модель абсолютно черного тела. Это сферическая полость с маленьким отверстием. Свет, падающий через отверстие внутрь полости, после многочисленных отражений и поглощений стенками практически полностью поглощается, и наружу не выходит.

Наряду с понятием черного тела используют понятие серого тела, поглощательная способность которого меньше единицы, но одинакова для всех частот и зависит только от температуры, материала, из которого сделано тело и состояния его поверхности

$$a_{\nu,T}^{\text{сер}} = a_T^{\text{сер}} = \text{const} < 1.$$

У реальных тел $a_{\nu,T} < 1$ и зависит от частоты.

3.2. Закон Кирхгофа

Г. Р. Кирхгоф в 1859 г. нашел количественную связь излучательной и поглощательной способности тел: *отношение*

излучательной к поглощательной способности не зависит от природы тела и является универсальной функцией частоты и температуры, одинаковой для всех тел:

$$\left(\frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}}\right)_{\text{тело1}} = \left(\frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}}\right)_{\text{тело2}} = \dots = f(\nu, T),$$

где функция $f(\nu, T)$ называется универсальной функцией Кирхгофа. Этот закон следует из того, что для теплового равновесия количества поглощаемой и излучаемой телом энергии должны быть равны для всех диапазонов частот: $dE_{\text{изл}} = dE_{\text{погл}}$. Закон справедлив для любого тела, в том числе и для абсолютно черного. Поскольку поглощательная способность абсолютно черного тела равна единице,

$$\left(\frac{r_{\nu,T}}{1}\right) = r_{\nu,T}^{\text{ч}} = f(\nu, T), \quad \text{следовательно, универсальная функция}$$

Кирхгофа есть не что иное, как испускательная способность абсолютно черного тела. В этом состоит физический смысл функции Кирхгофа. Из закона Кирхгофа следует, что испускательная способность любого тела меньше, чем абсолютно черного.

3.3. Законы Стефана-Больцмана и Вина

На основании экспериментальных данных и термодинамических законов польский физик Йозеф Стефан и Л. Больцман получили, что энергетическая светимость абсолютно черного тела $R(T)$ пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры T : $R(T) = \sigma T^4$, где σ – называется постоянной Стефана-Больцмана и равна $5,671 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

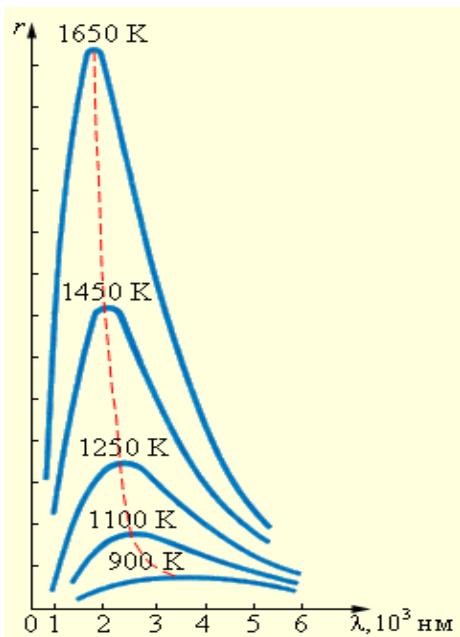


Рис. 30. Спектральное распределение излучения черного тела при различных температурах.

Максимум энергии излучения Солнца приходится примерно на 470 нм (зелено-голубая область спектра), что соответствует температуре наружных слоев Солнца около 6200 К (если рассматривать Солнце как абсолютно черное тело).

3.4. Квантовый характер излучения

После установления законов излучения стало очевидно, что первоочередная задача теории теплового излучения состоит в нахождении вида функции Кирхгофа, т.е. выяснении спектрального состава равновесного излучения абсолютно черного тела.

В 1900 году эту проблему пытался решить знаменитый английский физик, барон Д.У. Релей, который в основу своих

На рис.30 показано спектральное распределение излучения черного тела при различных температурах. Из графиков видно, что при каждом значении температуры T зависимость $r(\lambda, T)$ имеет свой ярко выраженный максимум. С увеличением температуры максимум смещается в область коротких длин волн.

В 1893 г. на основании термодинамических законов Вином было получено соотношение, называемое *законом смещения Вина*:

$$\lambda_m T = b \text{ или } \lambda_m = b / T.$$

Длина волны λ_m , на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре T . Значение постоянной Вина $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

рассуждений положил теорему классической статистической механики о *равномерном распределении энергии по степеням свободы в состоянии термодинамического равновесия*. Несколько позже эту идею подробно развил английский физик и астроном Д.Х.Джинс. Таким путем удалось получить зависимость излучательной способности абсолютно черного тела от частоты ν и температуры T :

$$f(\nu, T) = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \langle kT \rangle.$$

Это соотношение называют *формулой Релея–Джинса*. Оно согласуется с экспериментальными данными только в области достаточно длинных волн или малых частот (рис.31). Кроме того, из него следует абсурдный вывод о том, что интегральная светимость $R(T)$ черного тела должна обращаться при коротких (ультрафиолетовых) длинах волн в бесконечность, что было названо «ультрафиолетовой катастрофой» и что противоречило реально наблюдаемым данным.

Эта задача была успешно решена немецким физиком М.Планком на основе новой идеи, положившей начало квантовой физике. В своих расчетах Планк выбрал наиболее простую модель излучающей системы – атомы со всевозможными собственными частотами. Планк предположил, что энергия атомов не может принимать значения, меньшего некоторой минимальной величины ϵ , а любое другое значение энергии осциллятора кратно ϵ . Данная минимальная порция энергии была названа *квантом*. Планк сделал еще одно предположение о том, что процессы излучения и поглощения нагретым телом электромагнитной энергии происходят не непрерывно, как это считалось в классической физике, а порциями – квантами.

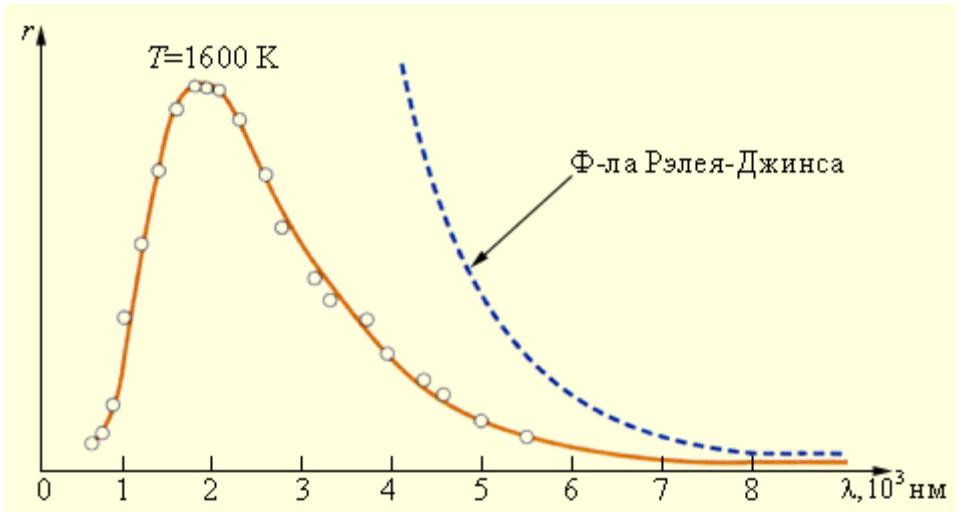


Рис. 31. Сравнение закона распределения энергии по длинам волн $r(\lambda, T)$ в излучении абсолютно черного тела с формулой Рэлея–Джинса при $T = 1600$ К.

По теории Планка, энергия кванта ε прямо пропорциональна частоте света:

$$\varepsilon = h\nu,$$

где h – так называемая *постоянная Планка*, равная $6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. На основе гипотезы о дискретном характере процессов испускания и поглощения телами электромагнитного излучения Планк получил формулу для излучательной способности абсолютно черного тела. Формулу Планка удобно записывать в форме, выражающей распределение энергии в спектре излучения абсолютно черного тела по частотам ν , а не по длинам волн λ :

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Здесь c – скорость света, h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

Формула Планка хорошо описывает спектральное распределение излучения черного тела при любых частотах и согласуется с экспериментальными данными. Из формулы Планка можно вывести законы Стефана–Больцмана и Вина.

Таким образом, Планк выдвинул гипотезу, согласно которой *энергия атома - осциллятора может изменяться не непрерывно, а только дискретно - квантами. Энергия кванта пропорциональна частоте колебаний, излучение и поглощение энергии при тепловом излучении тел квантовано.* Эта гипотеза в дальнейшем подтвердилась и в других экспериментах.

3.5. Пирометрия и пирометры

Пирометрия – совокупность оптических бесконтактных методов измерения температуры. Измерение температуры осуществляют *пирометрами* – это приборы для измерения температуры нагретых тел по интенсивности их теплового излучения в оптическом диапазоне спектра. Их действие основано на законах излучения абсолютно черного тела. Существуют *яркостные, цветовые* и *радиационные* пирометры.

3.6. Фотоэлектрический эффект

Различают 3 вида фотоэффекта: внешний, внутренний, вентильный.

Внешним фотоэффектом называется явление вырывания электронов из вещества под действием света (электромагнитного излучения) Наблюдается в твердых телах (металлах, полупроводниках, диэлектриках), а также в газах (фотоионизация).

Внутренним фотоэффектом называется переход электронов внутри полупроводников и диэлектриков из связанных состояний в свободные без вылета наружу. При этом концентрация носителей зарядов внутри вещества увеличивается, что приводит к возникновению *фотопроводимости*.

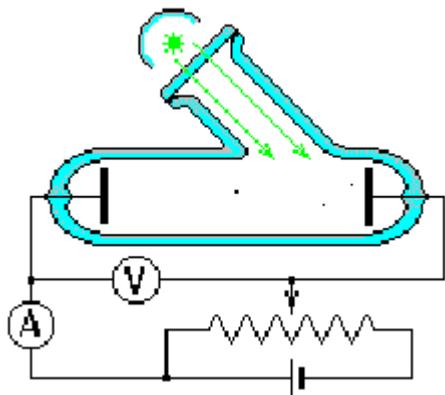


Рис. 32. Вакуумный фотоэлемент для изучения фотоэффекта

светочувствительного металла, падает свет через окошко. Из колбы откачан воздух и создан вакуум. На электроды подается напряжение, которое можно менять. При освещении отрицательно заряженного электрода (катода) в цепи возникает ток, который измеряется с помощью амперметра.

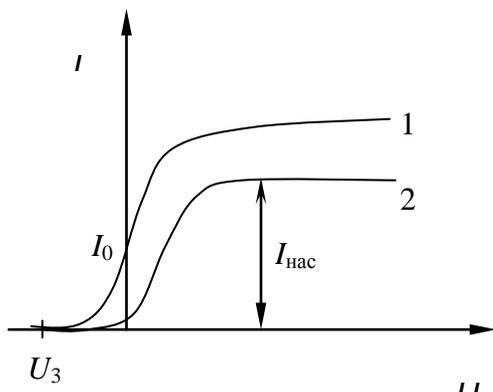


Рис. 33. Зависимости фототока I от напряжения U между электродами при различных интенсивностях падающего света E ($E_1 > E_2$).

Вентильный фотоэффект (разновидность внутреннего фотоэффекта) – возникновение э.д.с. при освещении контакта двух разных полупроводников.

На рис.32 приведена установка для изучения фотоэффекта. В замкнутой колбе находятся два электрода: катод и анод. На катод, покрытый слоем

Данная установка, называемая *вакуумным фотоэлементом*, позволяет установить связь между поданным на электроды напряжением и током. Зависимость силы фототока от напряжения называется *вольт-амперной характеристикой* и имеет вид, изображенный на рисунке 33.

Оказалось, что сила фототока, во-первых, прямо

пропорциональна интенсивности падающего света, а во-вторых, при

фиксированной интенсивности облучения она сначала растёт по мере повышения напряжения, но, достигнув определённого значения, уже не увеличивается. Это значение силы тока называется *током насыщения*.

А.Г. Столетов, опираясь на экспериментальные данные, установил следующие *закономерности внешнего фотоэффекта*:

1. Количество электронов, вырываемых с поверхности металла в секунду, прямо пропорционально интенсивности светового потока.

2. Для каждого вещества существует определенная минимальная частота ν_0 или максимальная λ_0 , при которой фотоэффект прекращается ($\nu \geq \nu_0$ или $\lambda \leq \lambda_0$). Эту частоту ν_0 или λ_0 называют «красной границей фотоэффекта».

3. Максимальная начальная скорость вырываемых электронов определяется частотой света и не зависит от интенсивности падающего светового потока.

В 1905 г. Эйнштейн раскрыл сущность фотоэффекта. Он предположил, что электромагнитное излучение не просто испускается порциями - оно и распространяется в пространстве, и поглощается веществом тоже в виде порций - световых квантов (квант электромагнитной энергии был назван *фотоном* и имеет свойства элементарной частицы). Энергия фотона ε связана с частотой электромагнитного излучения ν соотношением, предложенным ранее Планком, $\varepsilon = h \nu$ (h -постоянная Планка).

Согласно Эйнштейну, фотон, после его поглощения металлом, отдает свою энергию электрону, а электрон расходует ее на преодоление потенциального барьера (эта часть энергии называется работой выхода электрона из металла A), оставшаяся после этого энергия тратится на сообщение электрону вне металла кинетической энергии. Отсюда следует, что для возникновения фотоэффекта не важна интенсивность падающего светового пучка, главное, хватает ли отдельному световому кванту энергии, чтобы выбить электрон из вещества. Минимальная энергия, необходимая для этого, равна работе выхода.

Закон сохранения энергии позволяет написать соотношение, связывающее скорость фотоэлектронов с частотой поглощаемого света:

$$h\nu = A + E_k,$$

где $h\nu$ - энергия, которую отдаёт фотон электрону вещества, A - работа выхода электрона из вещества, $E_k = mv^2/2$ - кинетическая энергия освобождённого электрона. Это уравнение называется *уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта*. Теория Эйнштейна объясняет все законы Столетова.

3.7. Масса и импульс фотона. Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного излучения.

Эйнштейн выдвинул предположение, что свет имеет корпускулярную природу, и его можно рассматривать как поток частиц. При этом, Эйнштейн, вводя понятие фотона, не отбрасывал волновую теорию света. Это видно уже из того факта, что энергия фотона пропорциональна частоте света $\varepsilon = h\nu$. Масса фотона определяется из закона взаимосвязи массы и энергии $m = E/c^2$, подставим в формулу энергию фотона, получим $m = h\nu/c^2$.

Фотон – элементарная ультрарелятивистская частица, движущаяся со скоростью света и имеющая массу покоя равную нулю.

Импульс фотона равен $p = \varepsilon/c = h\nu/c$. Из приведенных формул видно, что фотон, как и любая другая частица, характеризуется энергией, массой, импульсом, т.е. данные параметры указывают на *корпускулярные* свойства фотона. Но с другой стороны, все эти параметры определяются частотой ν , которая является *волновой* характеристикой света. Можно сказать, что свет проявляет *корпускулярно-волновой дуализм* т.е. *проявляет как корпускулярных, так и волновых свойств*. Для описания одних явлений (интерференция, дифракция, поляризация) более подходит волновая точка зрения на свет, а для описания других (тепловое излучение, фотоэффект и др.) – фотонная. В настоящее время существует единая непротиворечивая теория – квантовая теория поля или квантовая электродинамика.

4 ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ. СТРОЕНИЕ АТОМА

4.1. Основные положения квантовой механики. Модели атома Томсона и Резерфорда

Первая попытка создания модели атома принадлежит Дж. Томсону (1903). Согласно этой модели, атом представляет собой положительно заряженный шар, внутри которого колеблются электроны: суммарный отрицательный заряд равен положительному, т.к. в целом атом нейтральный. В 1910-11 гг. Э.Резерфорд, на основе проведенных опытов, предложил *ядерную модель атома*. Согласно этой модели, в центре атома находится положительно заряженное ядро, а вокруг по замкнутым орбитам движутся электроны, образуя электронное облако. При этом кулоновская сила взаимодействия между ядром и электроном являлась центростремительной силой

$$\frac{Zee}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}, \text{ где } m_e \text{ и } v - \text{ масса и скорость электрона на орбите}$$

радиуса r , ϵ_0 - электрическая постоянная. Планетарная модель атома Резерфорда была проста, но не позволяла объяснить устойчивость атомов. Электроны вращаются вокруг ядра с центростремительным ускорением, а согласно классической электродинамике, ускоренно движущиеся заряженные частицы должны излучать электромагнитные волны и при этом непрерывно терять энергию. Вследствие этого, электроны должны были все время приближаться к ядру и конце концов упасть на него, что противоречит действительности. Попытка построить модель атома в рамках классической физики не привела к успеху. Преодоление возникших трудностей привело к созданию качественно новой *квантовой* теории атома.

4.2. Линейчатый спектр атома водорода

Изучение спектров излучения разреженных газов показали, что каждому газу соответствует определенный линейчатый спектр, состоящий из отдельных, близко расположенных линий. Шведский физик И. Бальмер вывел эмпирическую зависимость, описывающую

спектральные линии атома водорода в *видимой области спектра* $\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n = 3, 4, 5, \dots$), где R -постоянная Ридберга. При различных значениях n образуется группа спектральных линий, названная *серией Бальмера*.

В дальнейшем в спектре атома водорода было обнаружено несколько серий частот излучения. В *ультрафиолетовой области спектра* находится *серия Лаймана* $\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$).

В *инфракрасной области спектра*: *серия Пашена* $\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n = 4, 5, 6, 7, \dots$); *серия Брэкета* $\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ ($n = 5, 6, 7, 8, \dots$) и т.д. Все

серии в спектре водорода можно описать *обобщенной формулой Бальмера* $\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где m определяет номер серии и может принимать значения $m=1, 2, 3, 4, 5, \dots$, n определяет отдельные линии этой серии и принимает значения $n = m + 1; m + 2; m + 3; m + 4$ и т.д..

4.3. Постулаты Бора

Датский физик Н. Бор первым попытался преодолеть кризис теории атомов, связав в единое целое эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер излучения и поглощения света.

Он выдвинул три постулата, которые не соответствовали законам классической механики:

Первый постулат Бора. Электрон в атоме может двигаться по некоторым стационарным круговым орбитам. При этом атом находится в стационарном состоянии, не излучая и не поглощая энергию. Каждой такой орбите можно приписать порядковый номер n , называемый главным квантовым числом.

Правило квантования орбит Бора. В стационарном состоянии электроны, вращаясь по круговым орбитам, должны иметь

дискретные (квантованные) значения момента импульса L , удовлетворяющие соотношению $L_n = m_e v r = \hbar n$, где n принимает целочисленные значения $n = 1, 2, 3, \dots$, \hbar - приведенная постоянная Планка ($\hbar = h/2\pi$). Напомним, что момент импульса L равен произведению массы электрона m_e , его скорости v и радиуса его орбиты r .

Второй постулат Бора. При переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается или поглощается квант энергии, равный разности энергий соответствующих стационарных состояний $h\nu = E_n - E_m$. При переходе атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией ($E_n < E_m$) происходит излучение кванта. При этом в атоме происходит переход электрона с более удаленной от ядра орбиты на близлежащую. Если осуществляется переход атома из состояния с меньшей энергией в состояние с большей энергией ($E_n > E_m$), то происходит поглощение кванта. При этом электроны в атоме переходят с более близких к ядру орбит на более дальние.

Постулаты Бора позволили рассчитать спектр атома водорода и водородоподобных систем – систем, состоящих из ядра и одного электрона (ионы He^+ , Li^{2+}). Из равенства кулоновской силы взаимодействия между ядром и электроном и центростремительной

силой $\frac{Zee}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$ и правила квантования орбит Бора, получаем

выражение радиусов r стационарных орбит $r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e Z e^2}$, где $n = 1,$

$2, 3, \dots$. Из полученного выражения следует, что радиусы стационарных орбит квантованы, т.е. имеют дискретные значения, пропорциональные квадрату главного квантового числа. Для атома водорода радиус первой орбиты электрона при $n = 1$, называется *первым боровским радиусом*.

Скорость движения электрона по n -й орбите равна $v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Скорость электрона максимальна на первой боровской орбите ($n = 1$).

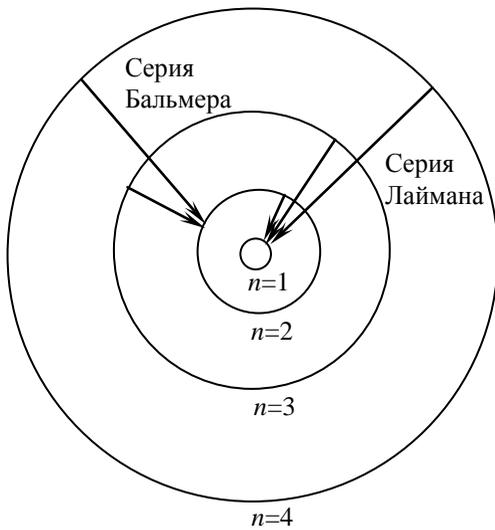
Энергия электрона в атоме складывается из кинетической энергии ($E_k = m_e v^2/2$) движущихся электронов, потенциальной энергии кулоновского взаимодействия с ядром ($E_{II} = -Ze^2/4\epsilon_0 r$) и равна $E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Из полученной формулы

видно, что энергия электрона в атоме принимает не любые, а дискретные значения т.е. квантуется. *Энергетический уровень* – энергия, которой обладает атомный электрон в определенном стационарном состоянии. Энергетические состояния атома образуют последовательность энергетических уровней, изменяющихся в зависимости от значения n . Энергетическое состояние с $n = 1$ является *основным* (состояние с минимальной энергией), состояния с $n > 1$ называются возбужденными. Энергетические уровни атома принято изображать горизонтальными линиями, перпендикулярными оси энергий (рис. 34).

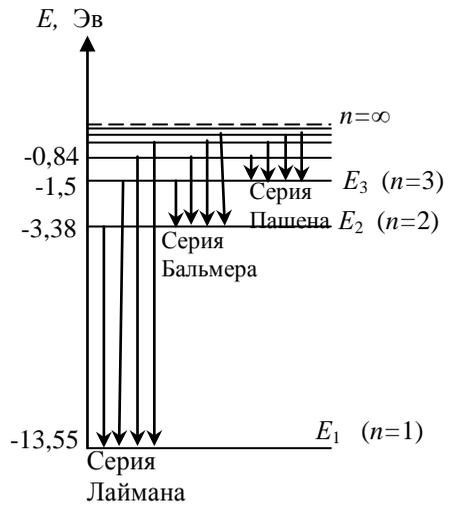
Энергия атома водорода с увеличением n возрастает и энергетические уровни сближаются к границе, соответствующей $n = \infty$. При $n \rightarrow \infty$ электрон удаляется от ядра на бесконечно большое расстояние, а его энергия связи с ядром стремится к нулю. Это значит, что при $E = 0$ электрон уже не связан с ядром и становится свободной частицей.

4.4. Корпускулярно-волновой дуализм свойств микрочастиц. Гипотеза Луи-де-Бройля

В 1923 г. французский физик Луи де Бройль высказал гипотезу, согласно которой *корпускулярно-волновой дуализм является универсальным свойством любых частиц, а не только света*. Это значит,



а)



б)

Рис. 34. Серии излучения атома водорода:

а) переходы электрона между орбитами стационарных состояний;

б) переходы электрона между энергетическими уровнями.

что частица массой m , движущейся со скоростью v , характеризуется не только координатами, импульсом p и энергией E , но и подобно фотону частотой ν и длиной волны λ_B . Любой частице, обладающей

импульсом, соответствует длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$, где

p , m , v – импульс, масса и скорость частицы.

Наличие волновых свойств у микрочастиц подтвердилось в опытах английского физика Д. Томсона (дифракция электронов) и опытах российских физиков В.А. Фабриканта, Л.М. Бибермана, Н.Г. Сушкина (дифракция электронного пучка).

4.5. Соотношение неопределенностей Гейзенберга Основные идеи и представления квантовой механики

Теория Бора оказалась недостаточной для объяснения многих явлений микромира таких как строения многоэлектронных атомов, молекул, химической связи и т.д. Идеи де Бройля и выявленные на опыте волновые свойства частиц вещества послужили толчком к созданию новой теории, описывающей поведение микрочастиц с учетом их волновых свойств. Эта теория была основана В. Гейзенбергом и Э. Шредингером и называлась квантовая (волновая) механика. Квантовая механика раскрывает два основных свойства вещества: квантованность внутриатомных процессов и волновую природу частиц.

На основе волновых свойств частицы В. Гейзенбергом было сформулировано *соотношение неопределенностей* – одно из фундаментальных положений квантовой механики. Согласно этому соотношению положение (или координаты) и импульс (или скорость) движущейся частицы могут быть заданы одновременно лишь с ограниченной степенью точности, т. е. имеют неопределенность. *Произведение неопределенности координаты Δx частицы на неопределенность проекции Δp_x на данное направление не может быть меньше постоянной Планка h : $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$.*

Подобное соотношение относится и к другим координатам $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$, $\Delta y \cdot \Delta p_y \geq h$, $\Delta z \cdot \Delta p_z \geq h$. Предположим, импульс частицы известен точно, т.е. $\Delta p_x = 0$. Это значит, что известна и длина волны де Бройля $\lambda_B = h/p$. Из соотношения неопределенностей следует, что

$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p_x} \rightarrow \infty$. Дело в том, что длина волны точно определена лишь

для гармонической волны с постоянной амплитудой и бесконечной протяженности по оси X. Это значит, что частицу можно обнаружить в любой точке пространства. Она не локализована и $\Delta x \rightarrow \infty$. С другой стороны, чем точнее определена координата частицы $\Delta x \rightarrow 0$, тем

менее точными становятся значения импульса $\Delta p_x \geq \frac{h}{\Delta x} \rightarrow \infty$. Таким

образом, для микрочастицы не существует состояний, в которых ее

координаты и импульс имели бы одновременно точные значения. В этом состоит *физический смысл соотношения неопределенностей*.

Подобное соотношение имеется и для неопределенностей измерения времени какого-либо состояния микросистемы t и ее энергии ΔE

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar.$$

Чем меньше время t ($\Delta t \rightarrow 0$) частица пребывает в некотором состоянии, тем меньше определена ее энергия ($\Delta E \rightarrow \infty$). И наоборот, в стационарном состоянии, где время пребывания частицы стремится к бесконечности ($\Delta t \rightarrow \infty$), ее энергия определена $\Delta E \rightarrow 0$.

Соотношение неопределенности является прямым следствием волновых свойств микрочастиц. Законы квантовой механики получили *вероятностную* трактовку. Движение микрочастицы в квантовой механике описывается с помощью некоторой функции координат и времени – *волновой функции* ψ (пси-функции), являющейся основной характеристикой частицы. Интерпретацию волновой функции в 1926г. дал немецкий физик М. Борн следующим образом – *волновая функция* $\psi(x, y, z)$ *характеризует вероятность нахождения частицы в данный момент времени в некоторой точке пространства*. Согласно Борну, физический смысл имеет не сама функция, а квадрат модуля волновой функции $|\psi|^2$, который характеризует вероятность пребывания частицы в определенной точке пространства. Величина $|\psi|^2$ есть вероятность dP того, что частица будет обнаружена в пределах рассматриваемого малого объема dV

$$dP = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 dx dy dz.$$

Вид Ψ -функции в каждом конкретном случае можно получить путем решения *волнового уравнения Шредингера*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

где m – масса частицы, i – мнимая единица, $\hbar = h/2\pi$ – приведенная постоянная Планка, U – потенциальная энергия частицы, Δ - оператор Лапласа, который представляет собой сумму вторых частных производных по координатам, т.е.

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Для *стационарных состояний* (состояний с фиксированными значениями энергии) частиц уравнение Шредингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + U\varphi = E\varphi \quad \text{или} \quad \Delta \varphi + (E-U) \frac{2m}{\hbar^2} \varphi = 0$$

и позволяет определить волновую функцию φ , которая зависит только от координат частицы.

По своему смыслу ψ – функция должна удовлетворять некоторым естественным требованиям: быть однозначной, непрерывной, конечной во всем пространстве, иметь непрерывные производные. Для объективно существующей частицы должно

выполняться так называемое условие нормировки $\iiint_{\infty} |\psi|^2 dV = 1$,

смысл которого состоит в том, что вероятность нахождения частицы где-либо в пространстве равна единице. В тех местах, где частица не может оказаться $\psi(x, y, z) = 0$.

Уравнение Шредингера имеет ряд возможных решений ψ (функций). Из них отбираются решения $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$, удовлетворяющие вышеуказанным требованиям. Это как называемые *собственные функции*. Получение такой системы собственных функций оказывается, возможным лишь при определенных дискретных значениях энергии $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ (энергетические уровни). Поэтому волновые функции содержат безразмерные параметры (квантовые числа), которые могут принимать ряд дискретных значений. Уравнение Шредингера является фундаментальным уравнением квантовой механики и имеет такое же значение, как законы Ньютона в классической механике.

4.6. Квантовые числа

Состояние электрона в атоме определяется совокупностью четырех *квантовых чисел* n, l, m_l, m_s .

1. *Главное квантовое число* $n = 1, 2, 3, \dots$ определяет энергию электрона, обусловленную его взаимодействием с ядром. Каждому значению n соответствует свой энергетический уровень (см. рис.34).

2. *Орбитальное квантовое число* l определяет значение орбитального момента импульса электрона: $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, где $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$. Каждому значению l соответствует своя орбиталь.

3. *Магнитное квантовое число* m_l характеризует ориентацию момента импульса L и орбитального магнитного момента. При заданном значении l принимает значения $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, т.е. всего $2l + 1$ значений и определяет проекцию момента импульса электрона на заданное направление.

4. *Спиновое квантовое число* m_s определяет возможные ориентации спина (собственного момента импульса) электрона, может принимать два значения $\pm 1/2$.

По принципу Паули в атоме не может быть двух электронов с одинаковым набором квантовых чисел. Значит, на одной орбитали может находиться не более двух электронов с противоположными спинами. Распределение электронов в атоме подчиняется принципу минимума энергии (электрон занимает состояние с наименьшей энергией). Энергия электронных состояний в основном определяется квантовыми числами n и l . Переход атома из одного квантованного состояния в другое сопровождается изменением квантовых чисел и перестройкой его электронного облака.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Определить частоту света, излучаемого двукратно ионизированным атомом лития при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом $i=2$, если радиус орбиты электрона изменился в 9 раз.

Дано: Li^{**} , $i=2$, $r_2=9r_4$.

Найти: ν – ?

Решение: Порядковый номер лития $Z=3$. Поэтому двукратно ионизированный атом лития является водородоподобным и имеет один электрон, вращающийся вокруг ядра. Частота излучаемого света для водородоподобных атомов определяется формулой

$$\nu = RcZ^2(1/i^2 - 1/n^2), \quad (1)$$

где R – постоянная Ридберга; c – скорость света; Z – порядковый номер элемента; n – номер орбиты, с которой переходит электрон; i – номер орбиты, на которую электрон переходит.

Найдем отношение радиусов орбит. При движении электрона по орбите радиусом r_n кулоновская сила притяжения электрона к ядру является центростремительной силой:

$$q^2 / 4\pi\epsilon_0\epsilon r_n^2 = mV^2 / r_n, \quad (2)$$

где q – заряд электрона; m – масса электрона; ϵ – диэлектрическая проницаемость; ϵ_0 – электрическая постоянная; V – скорость движения электрона по орбите.

По первому постулату Бора, $mVr_n = nh/2\pi$, откуда

$V = nh / (2\pi mr_n)$. Подставив это значение в равенство (2), найдем r_n :

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot r_n} = \frac{mn^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r_n^2 r_n}; \quad r_n = \frac{\epsilon\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi \cdot m q^2}$$

Из последнего равенства видно, что радиус боровской орбиты пропорционален квадрату главного квантового числа, следовательно,

$i^2/n^2 = r_i/r_n = 1/9$. Умножив обе части равенства на i^2 , получим:

$\nu i^2 = RcZ^2(1 - i^2/n^2)$, откуда:

$$v = RcZ^2(1 - i^2/n^2) \cdot (1/i^2);$$

$$v = 1,097 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3^2(1 - 1/9) \cdot 1/4 = 6,58 \cdot 10^{15} \text{ 1/c}.$$

Проверяем единицу v : $[v] = [m/(m \cdot c)] = [1/c] = [\Gamma\text{ц}]$.

Задача 2. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля для двух случаев: 1) $U_1=51\text{В}$; 2) $U_2=510\text{кВ}$.

Дано: $U_1=51\text{В}$, $U_2=510\text{кВ}=0,51 \cdot 10^6\text{В}$.

Найти: λ_1 , λ_2 - ?

Решение: Длина волны де Бройля для частицы зависит от ее импульса и определяется формулой:

$$\lambda = h/p, \quad (1)$$

где h – постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия W . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы).

В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0 W}, \quad (2)$$

где m_0 – масса покоя частицы.

В релятивистском случае:

$$p = \sqrt{W(W + 2E_0)}/c, \quad (3)$$

где $E_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя частицы.

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется в нерелятивистском случае в виде:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 W}}, \quad (4)$$

в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\sqrt{W(W + 2E_0)}}. \quad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов $U_1=51В$ и $U_2=510кВ$, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (4) и (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U ,

$$W = eU.$$

В первом случае $W_1 = eU = 0,51 \cdot 10^{-4} МэВ$, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0 c^2 = 0,51 МэВ$. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (4). Для упрощения расчетов заметим, что $W_1 = 10^{-4} m_0 c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде:

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} m_0 c^2}} = \frac{10^2 \cdot h}{\sqrt{2} \cdot m_0 c},$$

Учитывая, что $h/(m_0 c)$ есть комптоновская длина волны λ_c , получаем:

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \lambda_c.$$

Так как $\lambda_c = 2,43 нм$, то

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} 2,43 нм = 171 нм = 0,171 \cdot 10^{-9} м.$$

Во втором случае кинетическая энергия

$$W_2 = eU_2 = 510 кэВ = 0,51 МэВ,$$

т.е. равна энергии покоя электрона. В этом случае необходимо применить релятивистскую формулу (5). Зная, что $W_2 = 0,51 \text{ МэВ} = m_0 c^2$, по формуле (5) найдем:

$$\lambda_2 = \frac{h}{\frac{1}{2} \sqrt{m_0 c^2 (m_0 c^2 + 2m_0 c^2)}} = \frac{h}{\sqrt{3} m_0 c^2}, \quad \text{или} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя значение λ , произведем вычисления:

$$\lambda_2 = \frac{2,43}{\sqrt{3}} \text{ пм} = 1,40 \text{ пм} = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Задача 3. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка $W=10 \text{ эВ}$. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Дано: $W=10 \text{ эВ} = 16 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Найти: Δl – ?

Решение: Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

где Δx – неопределенность координаты частицы (в данном случае электрона); Δp – неопределенность импульса частицы (электрона); \hbar – постоянная Планка, деленная на 2π .

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = l/2 \quad (1)$$

Соотношение неопределенностей (1) можно записать в этом случае в виде

$$(l/2) \cdot \Delta p \geq \hbar$$

откуда

$$l \geq 2\hbar / \Delta p \quad (2)$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp во всяком случае не должна превышать значения самого импульса p , т.е. $\Delta p \leq p$. Импульс p связан с кинетической энергией W соотношением $p = \sqrt{2m_0 W}$. Заменяем Δp значением $\sqrt{2m_0 W}$ (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{min} = 2\hbar / \sqrt{2m_0 W} \quad (3)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу длины. Для этого в правую часть формулы (3) вместо символов величин подставим обозначения их единиц:

$$\frac{[\hbar]}{([m][W])^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{(1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж})^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \text{ с} = \left(\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ м}$$

Найденная единица является единицей длины. Произведем вычисления:

$$l_{min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 124 \text{ пм}.$$

Задача 4. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном потенциальном ящике (яме). Ширина ящика $l = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Определить наименьшее значение энергии электрона, а также вероятность нахождения электрона на участке $0 < x < l/5$ пятого энергетического уровня и точки, где плотность вероятности нахождения электрона на пятом энергетическом уровне ($n = 5$) минимальна и максимальна.

Дано: $l = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $0 < x < l/5$, $n = 5$.

Найти: E_{min} , $w - ?$

Решение: Состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном потенциальном ящике (яме) шириной l описывается волновой функцией

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (1)$$

где $n=1,2,3,\dots$; x – координата частицы.

Полная энергия частицы в потенциальном ящике зависит от его ширины l и определяется формулой

$$E = h^2 \cdot n^2 / (8ml^2), \quad (2)$$

где h – постоянная Планка; m – масса частицы; $n = 1,2,3,\dots$

Минимальное значение энергии электрон будет иметь при минимальном значении n , т.е. при $n = 1$. Следовательно,

$$E_{min} = h^2 \cdot 1^2 / (8ml^2)$$

Подставим числовые значения и вычислим:

$$E_{min} = \frac{6,62 \cdot 10^{-68} \text{ Дж}^2 \cdot c^2}{8 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 4 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2} = 1,5 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Вероятность того, что электрон будет обнаружен в интервале

от x до $(x + dx)$, равна $\omega = \int_x^{x+dx} |\psi(x)|^2 dx$. Искомую вероятность

находим интегрированием в пределах от 0 до $l/5$:

$$\omega = \int_0^{l/5} \left| \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \right|^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/5} \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Электрон по условию задачи находится на пятом энергетическом уровне т.е. $n=5$. Тогда:

$$\omega = \frac{2}{l} \int_0^{l/5} \sin \frac{5\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \left[\frac{1}{2} x - \frac{l}{4 \cdot 5\pi} \cdot \sin 2 \frac{5\pi \cdot x}{l} \right]_0^{l/5} = 0,2.$$

Таким образом, вероятность нахождения электрона на пятом энергетическом уровне при $0 < x < l/5$, равна 0,2. Как следует из формулы (1), минимальное значение $\psi(x)$ равно 0. Это будет в том

случае, когда аргумент синуса $\pi n x / l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, k\pi$, или $x = kl/n$.

При $n = 5$ $x = kl/5 = 0,2kl$. Следовательно:

- 1) $k = 0$, $x_0 = 0,2 \cdot 0 \cdot l = 0$;
- 2) $k = 1$, $x_1 = 0,2 \cdot 1 \cdot l = 0,2 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 0,4 \cdot 10^{-10}$ М;
- 3) $k = 2$, $x_2 = 0,2 \cdot 2 \cdot l = 0,2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 0,8 \cdot 10^{-10}$ М;
- 4) $k = 3$, $x_3 = 0,2 \cdot 3 \cdot l = 0,2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 1,2 \cdot 10^{-10}$ М;
- 5) $k = 4$, $x_4 = 0,2 \cdot 4 \cdot l = 0,2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 1,6 \cdot 10^{-10}$ М;
- 6) $k = 5$, $x_5 = 0,2 \cdot 5 \cdot l = 0,2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-10}$ М.

При больших значениях k мы выходим за пределы заданного интервала $0 < x < l$.

Из формулы (1) следует, что максимальное значение $\psi(x)$ равно $\sqrt{2/l}$ в тех случаях, когда $\sin(\pi n x / l) = 1$, т.е. когда $\pi n x / l = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots, (2k-1)\pi/2$, или $x = (2k-1)l/(2\pi)$.

При $n = 5$ $x = (2k-1) \cdot 0,1l$. Следовательно:

- 1) $k = 1$, $x_1 = l/(2\pi) = 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-10}$ М = $0,2 \cdot 10^{-10}$ М;
- 2) $k = 2$, $x_2 = 3 \cdot 0,1l = 3 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-10}$ М = $0,6 \cdot 10^{-10}$ М;
- 3) $k = 3$, $x_3 = 5 \cdot 0,1l = 5 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-10}$ М = $1 \cdot 10^{-10}$ М;
- 4) $k = 4$, $x_4 = 7 \cdot 0,1l = 7 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-10}$ М = $1,4 \cdot 10^{-10}$ М;
- 5) $k = 5$, $x_5 = 9 \cdot 0,1l = 9 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-10}$ М = $1,8 \cdot 10^{-10}$ М.

При больших значениях k электрон выходит за пределы потенциального ящика.

Полученные результаты представлены графически на рис.5, на котором показано распределение плотности нахождения электрона в потенциальном ящике на различных энергетических уровнях, начиная от $n=1$ до $n=5$. Максимальная плотность вероятности равна $2/l$.

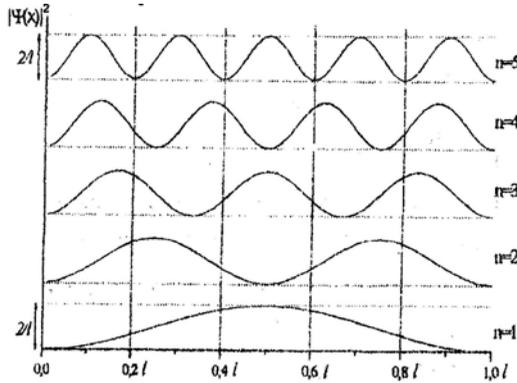


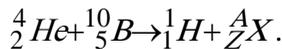
рис.5

Задача 5. При соударении α -частиц с ядром бора ${}^{10}_5B$ произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одним из этих ядер было ядро атома водорода 1_1H . Определить порядковый номер и массовое число другого ядра, дать символическую запись ядерной реакции и определить ее энергетический эффект.

Дано: 4_2He , ${}^{10}_5B$, 1_1H .

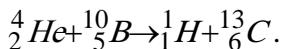
Найти: Z, A, Q - ?

Решение: Обозначим неизвестное ядро символом A_ZX . Так как α -частица представляет собой ядро гелия 4_2He , запись реакции имеет вид



Применив закон сохранения числа нуклонов, получим уравнение $4 + 10 = 1 + A$, откуда $A=13$. Применив закон сохранения заряда, получим уравнение $2 + 5 = 1 + Z$, откуда $Z=6$. Следовательно, неизвестное ядро является ядром атома изотопа углерода ${}^{13}_6C$.

Теперь можем записать реакцию в окончательном виде:



Энергетический эффект Q ядерной реакции определяется по формуле

$$Q = 931[(m_{\text{He}} + m_{\text{B}}) - (m_{\text{H}} + m_{\text{C}})].$$

Здесь в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых скобках – массы ядер – продуктов реакции. При числовых подсчетах по этой формуле массы ядер заменяют массами нейтральных атомов. Возможность такой замены вытекает из следующих соображений.

Число электронов в электронной оболочке нейтрального атома равно его зарядовому числу Z . Сумма зарядовых чисел исходных ядер равна сумме зарядовых чисел ядер – продуктов реакции. Следовательно, электронные оболочки ядер гелия и бора содержат вместе столько же электронов, сколько их содержат электронные оболочки ядер углерода и водорода.

Очевидно, что при вычитании суммы масс нейтральных атомов углерода из суммы масс атомов гелия и бора массы электронов выпадут, и мы получим тот же результат, как если бы брали массы ядер. Подставив массы атомов в расчетную формулу, получим

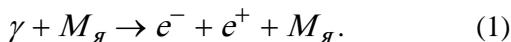
$$\begin{aligned} Q &= 931 \cdot [(4,00260 + 10,01294) - (1,00783 + 13,00335)] \text{ МэВ} = \\ &= 4,06 \text{ МэВ} = 6,4 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Задача 6. Определить пороговую энергию γ -кванта для образования пары электрон-позитрон в кулоновском поле ядра.

Дано: e^- , e^+ , $M_{\text{я}}$.

Найти: E_{γ} – ?

Решение: Процесс образования пары электрон-позитрон происходит по схеме



Пороговая энергия – это минимальная величина энергии γ -кванта, при которой возможно начало этого процесса. На основании закона сохранения импульса можно записать (считая ядро покоящимся)

$$|p_{\gamma}| = |p_{e^-} + p_{e^+}|, \text{ где } p_{\gamma} \text{ – импульс падающего фотона; } p_{e^-}, p_{e^+} \text{ –}$$

импульсы электрона и позитрона. Связь между энергией и импульсом при релятивистском движении частиц выражается формулой $E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$, где m_0 – масса покоя частицы; c – скорость света в вакууме. Учитывая эту связь и применяя закон сохранения энергии для процесса (1), получим

$$pc + M_{\gamma}c^2 = \sqrt{(pc)^2 + \left[2m_0e + M_{\gamma}\right]c^2}^2, \quad (2)$$

где pc – пороговая энергия γ -кванта $E_{\text{п}}$.

Возведем обе части равенства (2) в квадрат:

$$(pc + M_{\gamma}c^2)^2 = (pc)^2 + \left[2m_0e + M_{\gamma}\right]c^2^2.$$

После раскрытия скобок и сокращения подобных членов, получим

$$E_{\gamma} = pc = 2m_0ec^2 + 2m_0^2c^2 / M_{\gamma}.$$

Отношение $2m_0ec^2 / M_{\gamma} \ll m_0ec^2$, так что этим членом можно пренебречь. Окончательно получаем

$$E_{\gamma} = 2m_0ec^2. \quad (3)$$

Подставляя числовые значения в формулу (3), имеем

$$E_{\gamma} = 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} (3 \cdot 10^8)^2 \text{ м}^2 / \text{с}^2 = 1,64 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Задача 7. Определить начальную активность радиоактивного препарата магния ${}^{27}_{12}\text{Mg}$ массой $m=0,2\text{мкг}$, а также его радиоактивность A через время $t=6\text{ч}$. Период полураспада магния считать известным.

Дано: ${}^{27}_{12}\text{Mg}$, $m=0,2\text{мкг}=2 \cdot 10^{-10}\text{кг}$, $t=6\text{ч}=2,16 \cdot 10^4\text{с}$.

Найти: A_0 – ?

Решение: Активность A препарата характеризует скорость радиоактивного распада и измеряется числом ядер, распадающихся в единицу времени:

$$A = -dN/dt,$$

где dN – число ядер, распавшихся за время dt . Знак минус показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Согласно основному закону радиоактивного распада $-\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$, где λ – постоянная радиоактивного распада. Так как

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ (N_0 – число нераспавшихся ядер в момент времени, принятый за начальный),

$$A = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda t}$$

Очевидно, что начальная активность (при $t = 0$)

$$A_0 = \lambda \cdot N_0. \quad (1)$$

Поэтому закон изменения активности со временем выражается формулой

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

За единицу измерения активности в СИ принята 1 c^{-1} . На практике обычно активность измеряют во внесистемных единицах – кюри ($1 \text{ Ки} = 3,700 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$).

Начальную активность определим по формуле (1). Входящая в эту формулу постоянная радиоактивного распада λ может быть выражена через период полураспада соотношением

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{T_{1/2}}.$$

Для ${}_{12}^{27}\text{Mg}$ период полураспада $T_{1/2} = 10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$, следовательно,

$$\lambda = \frac{0,693}{600} = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}.$$

Число радиоактивных атомов N_0 , содержащихся в препарате массой m , равно произведению числа Авогадро N_A на число килограмм-атомов данного изотопа m/μ (μ – масса одного килоатома):

$$N_0 = \frac{m}{\mu} \cdot N_A.$$

Выразив в этой формуле значения величин в единицах СИ, получим

$$N_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9} \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}{27} \text{ ядер} = 4,46 \cdot 10^{15} \text{ ядер}.$$

Вычислим по формуле (1) начальную активность препарата:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0;$$

$$A_0 = 1,15 \cdot 10^{-3} \cdot 4,46 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1} = 5,13 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1},$$

или

$$A_0 = \frac{5,13 \cdot 10^{12}}{3,7 \cdot 10^{10}} \text{ Ки} = 139 \text{ Ки}.$$

Активность через 6ч ($6ч = 2,16 \cdot 10^4 \text{ с}$) рассчитываем по формуле (2):

$$A = A_0 e^{-\lambda t} = 139 \cdot e^{-1,15 \cdot 10^{-3} \cdot 2,16 \cdot 10^4} \text{ Ки} = 22,0 \cdot 10^{-10} \text{ Ки} = 2,20 \text{ нКи}.$$

Контрольные задания

Вариант 1.

1. На тонкую глицериновую пленку толщиной $d = 1,5$ мкм нормально к ее поверхности падает белый свет. Определить длины волн λ лучей видимого участка спектра ($0,4 \leq \lambda \leq 0,8$ мкм), которые будут ослаблены в результате интерференции.

2. Луч света последовательно проходит через два николя, главные плоскости которых образуют между собой угол 5° . Принимая, что коэффициент поглощения каждого николя равен 0,1, найти, во сколько раз луч, выходящий из второго николя, ослаблен по сравнению с лучом, падающим на первый николь.

3. Как и во сколько раз уменьшится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения переместится с красной границы видимого спектра ($\lambda_{кр} = 780$ нм) на фиолетовую ($\lambda_{ф} = 390$ нм)?

4. Поток монохроматических лучей с длиной волны 600 нм падает нормально на пластинку с коэффициентом отражения 0,2. Сколько фотонов каждую секунду падает на пластинку, если давление лучей на пластинку составляет 10^{-7} Па.

5. Определить максимальную энергию ϵ_{\max} фотона серии Бальмера в спектре излучения атомарного водорода.

6. Вычислить длину волны де Бройля для молекулы азота, движущейся со средней скоростью, соответствующей комнатной температуре.

7. Найти вероятность нахождения частицы в середине бесконечно глубокой потенциальной ямы, если она находится на втором уровне.

8. Вычислить энергию ядерной реакции: ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$.

Вариант 2.

1. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R=8,6\text{ м}$. Наблюдение ведется в отраженном свете. Измерениями установлено, что радиус четвертого темного кольца (считая центральное темное пятно за нулевое) $r_4=4,5\text{ мм}$. Найти длину волны λ падающего света.

2. При прохождении света через трубку длиной $l_1 = 15\text{ см}$, содержащую десятипроцентный раствор сахара, плоскость поляризации света повернулась на угол $\phi_1 = 12,9^\circ$. В другом растворе сахара, налитом в трубку длиной $l_2 = 12\text{ см}$, плоскость поляризации повернулась на $\phi_2 = 7,2^\circ$. Определить концентрацию второго раствора.

3. При какой температуре максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела приходится на длину волны $0,642\text{ мкм}$. Найти энергетическую светимость абсолютно черного тела при данной температуре.

4. Давление света с длиной волны $\lambda = 400\text{ нм}$, падающего нормально на черную поверхность, равно 2 нПа . Определить число N фотонов, падающих за время 10 с на площадь $S = 1\text{ мм}^2$ этой поверхности.

5. Вычислить по теории Бора период вращения электрона в атоме водорода, находящегося в возбужденном состоянии ($n = 2$).

6. Определить длину волны λ де Бройля для частицы массой $m = 1\text{ г}$, движущейся со скоростью $v = 10\text{ м/с}$. Нужно ли учитывать в этом случае волновые свойства частицы?

7. Электрон, находящийся в бесконечно глубокой потенциальной яме, при переходе со второго энергетического уровня на первый излучает энергию 10 эВ . Определить ширину ямы. Как изменится величина излучаемой энергии, если ширина ямы увеличится в 100 раз?

8. Определить массу изотопа ${}_{53}^{131}\text{I}$, имеющего активность $A = 37\text{ ГБк}$.

Вариант 3.

1. На тонкую пленку в направлении нормали к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны 500 нм .

Отраженный от нее свет максимально усилен вследствие интерференции. Определить минимальную толщину d_{\min} пленки, если показатель преломления материала пленки $n = 1,4$.

2. Параллельный пучок света переходит из глицерина в стекло так, что пучок, отраженный от границы раздела этих сред, оказывается максимально поляризованным. Определить угол между падающим и преломленным пучками.

3. Определить температуру T и энергетическую светимость R абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения приходится на длину волны 600 нм .

4. Определить световое давление на плоскую поверхность с коэффициентом отражения $0,8$ при падении на нее под углом 60° световой волны интенсивностью $0,5\text{ Вт/см}^2$.

5. Вычислить по теории Бора радиус r_2 второй стационарной орбиты и скорость электрона на этой орбите для атома водорода.

6. Определить длину волны де Бройля электрона, если его масса на 1% больше массы покоя.

7. Радиоактивный изотоп радия ${}_{88}^{225}\text{Ra}$ претерпевает четыре α -распада и два β^- -распада. Определить для конечного: 1) зарядовое число Z ; 2) массовое число A .

8. Активность A некоторого изотопа за время $t=10$ суток уменьшилась на 20% . Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа.

Вариант 4.

1. Найти наименьший угол падения монохроматического света ($\lambda = 0,5\text{ мкм}$) на мыльную пленку ($n = 1,3$) толщиной $0,1\text{ мкм}$, находящуюся в воздухе, при котором пленка в проходящем свете кажется темной.

2. Найти угол между плоскостями поляризации двух поляроидов, если интенсивность света, прошедшего оба поляроида,

уменьшилась в 6,5 раз. Коэффициент поглощения света в поляроидах 0,3.

3. Из смотрового окошечка печи излучается поток $\Phi_e = 4$ кДж/мин. Определить температуру T печи, если площадь окошечка $S = 8 \text{ см}^2$.

4. Накаленная нить проходит по оси цилиндра длиной 10 см и радиусом 5 см. Нить излучает световой поток мощностью 600 Вт. Считая световой поток симметричным относительно нити накала, определить давление света на поверхность цилиндра. Коэффициент отражения цилиндра 10%.

5. Не возбужденный атом водорода поглощает квант света с длиной волны $\lambda = 102,6 \text{ нм}$. Вычислить, пользуясь теорией Бора, радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода.

6. Координата пылинки массой 10^{-13} кг и линейным размером 1 мкм определена с точностью до 0,01 ее размеров. Какова неопределенность в вычислении V_x ?

7. Энергия связи $E_{\text{св}}$ ядра, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, равна 39,3 МэВ. Определить массу m нейтрального атома, обладающего этим ядром.

8. Определить, какая доля радиоактивного изотопа ${}_{89}^{225}\text{Ac}$ распадается в течение времени $t=6$ суток.

Вариант 5.

1. На тонкий стеклянный клин ($n = 1,5$) с углом $5'$ падает нормально пучок монохроматического света с длиной волны $0,591 \text{ мкм}$. Сколько темных полос приходится на 1 см клина?

2. Свет, падая из стекла в жидкость, частично отражается, частично преломляется. Отраженный луч полностью поляризован при угле преломления $45'$. Чему равны показатель преломления жидкости и скорость распространения света в ней? Показатель преломления стекла равен 1,52.

3. Поток излучения абсолютно твердого тела $\Phi_e = 10 \text{ кВт}$, максимум энергии излучения приходится на длину волны $\lambda_{\text{max}} = 0,8 \text{ мкм}$. Определить площадь S излучающей поверхности.

4. На зеркальную поверхность площадью $0,8 \text{ м}^2$ нормально падает 14×10^{18} квантов в секунду. Найти длину волны падающего света, если давление его равно 10^{-8} Па.

5. Электрон в атоме водорода находится на третьем энергетическом уровне. Определить кинетическую W , потенциальную Π и полную E энергии электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

6. Положение центра шарика массой 1 г и положение электрона известно с точностью до $0,01$. Найти наименьшую ошибку, с которой можно определить скорости шарика и электрона.

7. В результате соударения дейтрона с атомом бериллия ${}^9_4\text{Be}$ образовались новое ядро и нейтрон. Определить порядковый номер и массовое число образовавшегося ядра, записать ядерную реакцию и определить ее энергетический эффект.

8. Период полураспада изотопа ${}^{74}_{33}\text{As}$ равен $17,5$ суток. Определить постоянную распада и среднюю продолжительность жизни атомов этого изотопа.

Вариант 6.

1. Расстояние L от щелей до экрана в опыте Юнга равно 1 м . Определить расстояние между щелями, если на отрезке длиной $l = 1 \text{ см}$ укладывается $N = 10$ темных интерференционных полос. Длина волны $\lambda = 0,7 \text{ мкм}$.

2. Угол падения луча на поверхность жидкости $i = 30^\circ$. Отраженный луч максимально поляризован. Определить угол r преломления луча.

3. При нагревании тела длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности, изменилась от $1,45$ до $1,16 \text{ мкм}$. На сколько изменилась максимальная спектральная плотность энергетической светимости тела?

4. Свет с длиной волны $\lambda = 600 \text{ нм}$ нормально падает на зеркальную поверхность и производит на нее давление $P = 4 \text{ мкПа}$. Определить число фотонов, падающих за время, равное 10 с , на площадь $S = 1 \text{ мм}^2$ этой поверхности.

5. Найти наибольшую λ_{max} и наименьшую λ_{min} длины волны в ультрафиолетовой серии водорода (серия Лаймана).

6. Найти точность в определении импульса электрона и его скорости по следу, который электрон оставил на фотопластинке. Размеры зерна фотоэмульсии порядка 1 мк. Можно ли говорить о движении электрона по определенной траектории с точно заданной скоростью в каждой точке, если скорость его порядка 10^6 м/с?

7. Первоначальная масса радиоактивного изотопа радона ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ (период полураспада $T_{1/2} = 3,82$ сут.) равна 1,5 г. Определить: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 5 сут.

8. Фотон с энергией 1,53 МэВ превратился в пару электрон – позитрон. Принимая, что кинетическая энергия частиц одинакова, определить кинетическую энергию каждой частицы.

Вариант 7.

1. На тонкий стеклянный клин падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Расстояние между соседними темными интерференционными полосами в отраженном свете $\delta = 0,5$ мм. Определить угол α между поверхностями клина. Показатель преломления стекла, из которого изготовлен клин, $n = 1,6$.

2. Луч света, проходящий в стеклянном сосуде с водой, отражается от дна сосуда. При каком угле падения i отраженный луч максимально поляризован?

3. Абсолютно черное тело имеет температуру $T_1 = 500$ К. Какова будет температура T_2 тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в $n = 5$ раз?

4. Определить коэффициент отражения поверхности, если при энергетической освещенности $E_0 = 120$ Вт/м² давление света на нее оказалось равным 0,5 мкПа.

5. Определить энергию фотона, испускаемого атомом водорода при переходе электрона с третьей орбиты на вторую.

6. Протон обладает кинетической энергией $W = 1$ кэВ. Определить дополнительную энергию, которую необходимо сообщить ему для того, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в три раза.

7. При бомбардировке изотопа лития ${}^6_3\text{Li}$ дейтронами ${}^2_1\text{H}$ ($m_{{}^2_1\text{H}} = 3,3446 \cdot 10^{-27}$ кг) образуются две α -частицы ${}^4_2\text{He}$ и выделяется энергия $\Delta E = 22,3$ МэВ. Определить массу изотопа лития.

8. Вычислить истинный дефект массы и энергию связи ядра атома кислорода ${}^{16}_8\text{O}$. Определить среднее значение энергии связи, приходящейся на один нуклон.

Вариант 8.

1. На тонкий стеклянный клин падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Расстояние между соседними темными интерференционными полосами в отраженном свете $\delta = 0,5$ мм. Определить угол α между поверхностями клина. Показатель преломления стекла, из которого изготовлен клин, $n = 1,6$.

2. Параллельный пучок света переходит из глицерина в стекло так, что пучок, отраженный от границы раздела этих сред, оказывается максимально поляризованным. Определить угол между падающим и преломленным пучками.

3. Как и во сколько раз уменьшится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения переместится с красной границы видимого спектра ($\lambda_{\text{кр}} = 780$ нм) на фиолетовую ($\lambda_{\text{ф}} = 390$ нм)?

4. Определить коэффициент отражения поверхности, если при энергетической освещенности $E_0 = 120$ Вт/м² давление света на нее оказалось равным 0,5 мкПа.

5. Невозбужденный атом водорода поглощает квант света с длиной волны $\lambda = 102,6$ нм. Вычислить, пользуясь теорией Бора, радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода.

6. Координата пылинки массой 10^{-13} кг и линейным размером 1 мкм определена с точностью до 0,01 ее размеров. Какова неопределенность в вычислении V_x ?

7. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

8. Фотон с энергией 1,53 МэВ превратился в пару электрон – позитрон. Принимая, что кинетическая энергия частиц одинакова, определить кинетическую энергию каждой частицы.

Вариант 9.

1. Расстояние L от щелей до экрана в опыте Юнга равно 1 м. Определить расстояние между щелями, если на отрезке длиной $l = 1$ см укладывается $N = 10$ темных интерференционных полос. Длина волны $\lambda = 0,7$ мкм.

2. Найти угол между плоскостями поляризации двух поляроидов, если интенсивность света, прошедшего оба поляроида, уменьшилась в 6,5 раз. Коэффициент поглощения света в поляроидах 0,3.

3. При какой температуре максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела приходится на длину волны 0,642 мкм. Найти энергетическую светимость абсолютно черного тела при данной температуре.

4. Определить энергетическую освещенность E_0 зеркальной поверхности, если давление, производимое излучением, $P = 40$ мкПа. Излучение падает нормально к поверхности.

5. Электрон в атоме водорода находится на третьем энергетическом уровне. Определить кинетическую W , потенциальную U и полную E энергии электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

6. Положение центра шарика массой 1 г и положение электрона известно с точностью до 0,01. Найти наименьшую ошибку, с которой можно определить скорости шарика и электрона.

7. Электрон, находящийся в бесконечно глубокой потенциальной яме, при переходе со второго энергетического уровня на первый излучает энергию 10 эВ. Определить ширину ямы. Как изменится величина излучаемой энергии, если ширина ямы увеличится в 100 раз?

8. Вычислить энергию ядерной реакции: ${}^3_2\text{He} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H}$.

Вариант 10.

1. Найти расстояние между третьим и пятым минимумами на экране, если расстояние от двух когерентных источников ($\lambda = 0,6$ мкм) до экрана 2 м, расстояние между источниками 0,2 мм.

2. Угол падения луча на поверхность жидкости $i = 30^\circ$. Отраженный луч максимально поляризован. Определить угол r преломления луча.

3. Какая энергия излучается за 1 мин с 1 см^2 абсолютно черного тела, если максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_{\text{max}} = 0,6$ мкм?

4. Поток монохроматических лучей с длиной волны 600 нм падает нормально на пластинку с коэффициентом отражения 0,2. Сколько фотонов каждую секунду падает на пластинку, если давление лучей на пластинку составляет 10^{-7} Па.

5. Определить максимальную энергию ϵ_{max} фотона серии Бальмера в спектре излучения атомарного водорода.

6. Вычислить длину волны де Бройля для молекулы азота, движущейся со средней скоростью, соответствующей комнатной температуре.

7. Радиоактивный изотоп радия ${}_{88}^{225}\text{Ra}$ претерпевает четыре α -распада и два β^- -распада. Определить для конечного: 1) зарядовое число Z ; 2) массовое число A .

8. Определить, какая доля радиоактивного изотопа ${}_{89}^{225}\text{Ac}$ распадается в течение времени $t=6$ суток.

Список литературы

1. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие / Т.И. Трофимова. – 6-е изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 1999. – 542с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики: учеб. пособие: в 3 т. Т.2 /И.В.Савельев. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1982. – 432с.
3. Детлаф А.А. Курс физики: учеб. пособие / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 3-е изд., исправл. – М.: Высшая школа, 2001. – 718с.
4. Поливанов М.А. Электричество и магнетизм: учеб. пособие / М.А. Поливанов [и др.]. – Казань: Изд-во Казан. гос.технол.ун-та., 2007. –164 с.