Задачи межвузовской олимпиады по математике 2021 года (КНИТУ).

1.А) На плоскости даны 19 точек с целочисленными координатами, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, центр масс которого имеет целочисленные координаты.(5 баллов)

Б) Каким должно быть минимальное число точек на плоскости с целочисленными координатами и условием, что никакие три из них не лежат на одной прямой, для того чтобы утверждение пункта А) оставалось верным.(10 баллов)

2. Найти все значения параметров a и b для которых существует $\lim_{n\to+\infty} A^n$ и вычислить этот предел для всех таких a и b, если A=$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ (11 баллов)

3.Доказать, что вектора **a, b, c** компланарны тогда и только тогда, когда компланарны вектора

a$\times \boldsymbol{b}$, **a**$\times \boldsymbol{c}$, **c**$\times \boldsymbol{b}$. (4 балла)

4.Вычислить интегралы:

А) $\int_0^1 (\cos(2arcsin\sqrt{x}))^{)2020} dx$ (5 баллов)

Б) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\mathrm{e}^{2021x}+1)(cosx)^2}$dx (8 баллов)

5. Найти $\lim_{n\to+\infty} V_n$, где $V_n -$ обьемы тел вращения, образованных вращением кривых

Y_n= max(sinnx, $\sqrt{0{,}5(1+cos2nx)}$ вокруг оси Ox при $0 \leq x \leq 2\pi$.(10 баллов)

6.Рост популяции снусмумриков описывается дифференциальным уравнение

$\frac{dN}{dt}$=a(1- $\frac{lnN}{lnM}$)N, (t>0, M>0, a>0) , N(t) – количество снусмумриков в момент времени t, M-константа баланса, a- константа зависящая от условий среды. Найти момент времени при котором скорость роста популяции будет максимальной при начальном условии N(0)=0,5 M. Построить графики роста популяции при начальных условиях $N_1(0)$=0,5 M и $N_2(0)$=1,5 M. (10 баллов)

7. В уравнение y''+by'+cy=0 числа b и c случайным образом независимо друг от друга выбираются из отрезка [-1, 1]. А) Какова вероятность, что характеристическое уравнение соответствующее данному дифференциальному уравнению будет иметь два действительных корня одинакового знака.(5 баллов), Б) Найти вероятность что при любых начальных условиях для решения задачи Коши y(x) выполнено условие: существует $\lim_{x\to+\infty} y(x)$<∞ (решение задачи Коши ассимптотически устойчиво) (5 балла)

8. Найти все положительные целочисленные корни уравнения $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} x^{2n}$=$e^{x^2}$k! (k∈ $\boldsymbol{N}$) (10 баллов)

9. Каждая из двух урн содержит белые и черные шары. Из каждой урны вынимается по одному шару.

а) С какой вероятностью можно вынуть два белых шара если вероятность вынуть два черных шара равна 0,51 и общее количество шаров в обоих урнах равно 65 (9 баллов)

б) Найти наименьшее общее число черных шаров в обеих урнах достаточное для того чтобы вероятность достать 2 черных шара была бы больше вероятности достать 2 белых шара, если в одной урне 30 шаров, а во второй 12..(6 баллов)